Durchschnittsdarstellungen von Ordnungen

---

von

Oliver Pretzel

Berlyn 1965

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546513_0046

D U R C H S C H N I T T S D A R S T E L L U N G E N

von

O R D N U N G E N

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

P. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

vorgelegt von

Oliver Pretzel

aus Cambridge

1. Referent: Prof. Dr. H. Pachale

2. Referent: Prof. Dr. R. Berger

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Mai 1965

Tag der Promotion: 31. Juli 1965

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	Seite	1
Kapitel 1		
§ 1 Allgemeine Begriffe, Relationen	Seite	2
§ 2 Ordnungen	Seite	8
§ 3 Aquivalenzrelationen	Seite	17
Kapitel 2		
Abbildungen	Seite	18
Kapitel 3		
§ 1 Darstellung einer Relation als Durchschnitt konnexer Relationen	Seite	27
§ 2 Ketten	Seite	29
§ 3 Zwei Zerlegungssätze	Seite	38
§ 4 Unabhängige Systeme	Seite	43
§ 5 Maximale Systeme	Seite	54
Anhang		
Beispiele	Seite	60
Literaturverzeichnis	Seite	64

Einleitung

Die Grundlage dieser Arbeit ist der folgende Satz, der im ersten Kapitel bewiesen wird:

Satz: Es sei R eine Ordnung auf einer Menge M, dann ist R der Durchschnitt aller konnexer Ordnungen auf M, die gröber sind als R.

Nach diesem Satz braucht man, um R darzustellen, falls M n Elemente besitzt, höchstens n! konnexe Ordnungen, wenn n endlich ist, und höchstens 2^n sonst. Die durch den Satz angegebene Durchschnittsdarstellung ist aber meistens verkürzbar. In dieser Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, das eine Durchschnittsdarstellung von R mit höchstens n (und im Allgemeinen noch weniger) konnexen Ordnungen liefert.

In der Literatur werden zwar Produktdarstellungen von Ordnungen und Darstellungen von Ordnungen als Vereinigungen von Ketten untersucht, aber mir sind Arbeiten über Durchschnittsdarstellungen nicht bekannt.

Das erste Kapitel enthält zum großen Teil bekannte Ergebnisse über Relationen und Ordnungen. Die Darstellung ist aber den späteren Anwendungen angepaßt. Im zweiten Kapitel wird die Invarianz der gebildeten Begriffe gegenüber Abbildungen untersucht. Das dritte Kapitel ist dann der Entwicklung eines speziellen Verfahrens zur Gewinnung einer Durchschnittsdarstellung einer beliebigen vorgegebenen Ordnung gewidmet. Schließlich wird noch im Anhang das Verfahren auf ein Beispiel angewendet.

Kapitel 1

§ 1 Allgemeine Begriffe, Relationen

Sei M eine Menge. Unter dem Graphen einer Relation auf M verstehen wir eine Untermenge von $M \times M$. Man sagt zwei Elemente a und b vom M stehen in der Relation R, wenn (a,b) eine Element des Graphen von R ist. Wir werden in dieser Arbeit $(a,b) \in R$ oder a R b schreiben, je nachdem welche Schreibweise bequemer ist. Wir betrachten nur Relationen, R, für die

(1) $\qquad (a,a) \in R \qquad$ für alle $a \in M$

gilt. Relationen, für die (1) gilt, heißen reflexiv. Die Relation R^{-1} wird definiert durch

(2) $\qquad (a,b) \in R^{-1}$ genau dann, wenn $(b,a) \in R$.

Wenn R reflexiv ist, ist R^{-1} auch reflexiv.

Wir bezeichnen mit X(M) die Menge aller reflexiven Relationen von M. X(M) ist wohldefiniert, da X(M) eine Untermenge der Potenzmenge von $M \times M$ ist. In dieser Arbeit werden vier mögliche Eigenschaften von Relationen vorkommen:

(A) R transitiv. Wir nennen R dann eine Ordnung.

(B) Sei D die Diagonale von $M \times M$

$R \cap R^{-1} = D$ R heißt dann antisymmetrisch.

(C) $R \supseteq R^{-1}$ R heißt dann symmetrisch.

(D) $R \cup R^{-1} = M \times M$ R heißt dann konnex.

Wir haben in diesen Definitionen nicht mehr zwischen einer Relation und ihrem Graphen unterschieden.

Man beachte, daß das Wort Ordnung hier in einem schwächeren Sinne benutzt wird als üblich. Der Grund ist, daß wir im Folgenden eine Dualität zwischen der Antisymmetrie und der Konnexivität, die in den Definitionen schon implizit enthalten ist, herausarbeiten möchten. Eine Ordnung im üblichen Sinne heißt also bei uns antisymmetrische Ordnung. Eine symmetrische Ordnung (in unserer Terminologie) ist eine Äquivalenzrelation, und eine antisymmetrische, konnexe Ordnung ist eine Totalordnung.

Definition Sei I eine Indexmenge und zu jedem $i \in I$ $R_i \in X(M)$.

Mit $\bigwedge_{i \in I} R_i$ bezeichnen wir die Relation, deren Graph der Durchschnitt der Graphen der R_i ist. Wenn I nur aus zwei Elementen, i und j besteht, schreiben wir auch $R_i \wedge R_j$. Die Relation $\bigwedge_{i \in I} R_i$, die offenbar reflexiv ist, heißt der Durchschnitt der Relationen R_i .

Mit $\bigvee_{i \in I} R_i$ bezeichnen wir die Relation, deren Graph die Vereinigung der Graphen der R_i ist, und nennen sie die Vereinigung der Relationen R_i . Wenn I nur aus i und j besteht, schreiben wir analog zum Durchschnitt $R_i \vee R_j$.

$\bigwedge$, $\bigvee$, $\wedge$ und $\vee$ sind assoziative und kommutative Verknüpfungen in X(M).

Definition Seien R und S aus X(M)

R heißt feiner als S
S heißt gröber als R
in Zeichen $R < S$

wenn aus $(a,b) \in R$ folgt $(a,b) \in S$

Wenn $R \neq S$ aber $R \prec S$ schreiben wir $R \preccurlyeq S$.

Folgerungen (1) $R \prec S \leftrightarrow R \vee S = S \leftrightarrow R \wedge S = R$

(2) $T \prec R$ und $T \prec S \leftrightarrow T \prec R \wedge S$

(3) $T \prec R$ oder $T \prec S \rightarrow T \prec R \vee S$

(4) $T \succ R$ und $T \succ S \leftrightarrow T \succ R \vee S$

(5) $T \succ R$ oder $T \succ S \rightarrow T \succ R \wedge S$

(6) $R \prec S$ und $S \succ R \rightarrow R = S$.

(7) $R \prec S$ und $S \prec T \rightarrow R \prec T$

Die Folgerungen (2) bis (5) gelten in entsprechender Form für beliebige Vereinigungen und Durchschnitte. $(X(M), \prec)$ ist also ein vollständiger Verband mit den Verknüpfungen $\bigwedge, \bigvee$. Das maximale Element von $X(M)$, dessen Graph ganz $M \times M$ ist, nennen wir die indiskrete Ordnung auf M, und schreiben dafür O_M. Das minimale Element ist die Identität auf M, id_M. id_M ist die einzige Ordnung, die zugleich symmetrisch und antisymmetrisch ist. $X(M)$ ist, da alle Verknüpfungen durch Mengen-Operationen erklärt sind, distributiv.

Satz 1 Es seien R und S aus $X(M)$, und $R \prec S$.

a) R konnex $\rightarrow$ S konnex

b) S antisymmetrisch $\rightarrow$ R antisymmetrisch

c) R konnex und S antisymmetrisch $\rightarrow R = S$.

Beweis a) und b) sind unmittelbar einsichtig.

c) Annahme $R \not\preccurlyeq S$; es gibt also ein Paar, (a,b) mit $(a,b) \notin R$ und $(a,b) \in S$ $\quad ((a,b) \in M \times M)$.

Es folgt $(b,a) \in R$, da R konnex und also auch $(b,a) \in S$. Da S antisymmetrisch ist, muß dann $a = b$. Dann ist aber auch $(a,b) \in R$ und wir haben einen Widerspruch.

Satz 2 a) R sei konnex und nicht antisymmetrisch. Es gibt ein konnexes S echt feiner als R

b) R sei antisymmetrisch und nicht konnex. Es gibt ein antisymmetrisches S, das echt gröber als R ist.

(Das Wort "echt" soll jeweils andeuten, daß $S \neq R$)

Beweis von a) Da R nicht antisymmetrisch ist, gibt es zwei verschiedene Elemente a und b aus M, so daß $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R$. Wir wählen das Paar (a,b) fest und definieren:

$$(x,y) \in S \leftrightarrow (x,y) \in R \text{ und } (x,y) \neq (b,a)$$

S ist echt feiner als R, aber S ist noch konnex, da wenn $(x,y) \notin S$, $(x,y) \notin R$ oder $(x,y) = (b,a)$.
Im ersten Fall ist aber $(y,x) \in R$ und ungleich (b,a) und im zweiten ist (y,x) = (a,b). (y,x) ist also immer in S.

Beweis von b) Da R nicht konnex ist, gibt es ein Paar (a,b), das weder in R noch in R^{-1} enthalten ist. Wir setzen:

$$(x,y) \in S \leftrightarrow (x,y) \in R \text{ oder } (x,y) = (a,b).$$

S ist offensichtlich echt feiner als R und antisymmetrisch.

Satz 3 a) Es sei R_i konnex für alle $i \in I$, und I sei total geordnet. Gilt $i \leq j \rightarrow R_i \succ R_j$ für beliebige i und j aus I, so ist $\bigwedge_{i \in I} R_i$ konnex.

b) I wie in a). R_i sei antisymmetrisch für alle $i \in I$. Gilt $i \leqslant j \rightarrow R_i < R_j$ für beliebige i und j aus I. so ist $\bigvee_{i \in I} R_i$ antisymmetrisch.

Beweis von a) $(x,y) \notin \bigwedge_{i \in I} R_i$

$\rightarrow (x,y) \notin R_i$ für ein $i \in I$

$\rightarrow (x,y) \notin R_j$ für alle $j \geqslant i$

$\rightarrow (y,x) \in R_j$ für alle $j > i$

$\rightarrow (y,x) \in R_i$ für alle $i \in I$

$\rightarrow (y,x) \in \bigwedge_{i \in I} R_i$.

Beweis von b) Sei $(x,y) \in \bigvee_{i \in I} R_i$ und $(y,x) \in \bigvee_{i \in I} R_i$. Daraus folgt, daß $(x,y) \in R_i$ und $(y,x) \in R_j$ für geeignete i und j aus I. Sei nun etwa $i \geqslant j$. Dann ist $(y,x) \in R_i$ und also $x = y$.

Satz 4 Aus dem oben bewiesenen und Satz 1c) folgt mit Hilfe des Lemmas von Zorn:

Die minimalen konnexen und die maximalen antisymmetrischen Relationen in $\mathfrak{X}(M)$ sind genau diejenigen, die gleichzeitig konnex und antisymmetrisch sind.

Satz 5 Es sei R konnex. R wird genau durch die Menge aller antisymmetrischen Relationen bestimmt, die feiner als R sind.

$$R = \bigvee_{S < R} S \qquad (S \text{ antisymmetrisch})$$

Beweis a) $(x,y) \in S$ für ein solches S impliziert $(x,y) \in R$

b) Wir nehmen an, es gäbe ein Paar, (x,y) in R, das in keinem der S enthalten ist. Unter den S gibt es nach Satz 4 mindestens eine konnexe Relation S_o. Da S_o nicht (x,y) enthält, enthält es (y,x).

Mithin enthält R (y,x) und (x,y). Nach Satz 2 gibt es ein R' feiner als R und konnex, welches (y,x) nicht enthält. Wenden wir nun die gleiche Argumentation auf R' an, so ergibt sich, daß es ein S_1 gibt, das antisymmetrisch und feiner als R' ist und (x,y) enthält. Dieses S_1 ist aber auch feiner als R, womit wir einen Widerspruch erhalten haben.

Satz 6 Es sei R antisymmetrisch. R wird durch die Menge aller konnexen S mit $S \succ R$ eindeutig bestimmt.

$$R = \bigwedge_{S \succ R} S \qquad (S \text{ konnex})$$

Beweis a) $(x,y) \in R \rightharpoonup (x,y) \in S$ für alle konnexen $S \succ R$.

b) Nun nehmen wir an, (x,y) sei nicht in R, aber $(x,y) \in S$ für alle konnexen $S \succ R$. Unter diesen S gibt es nach Satz 4 mindestens ein S_0, das antisymmetrisch ist. S_0 enthält also nicht (y,x), und deshalb kann auch R nicht (y,x) enthalten. Nach Satz 2 gibt es nun ein antisymmetrisches R', das gröber als R ist und (y,x) enthält. Alle konnexen Ordnungen $S \succ R'$ enthalten (y,x). Unter diesen gibt es aber nach Satz 4 eine antisymmetrische Ordnung S_1. Diese ist gröber als R und kann (x,y) nicht enthalten. Damit ist unsere Annahme unhaltbar geworden, und der Satz ist bewiesen.

§ 2 Ordnungen

Die Menge aller Ordnungen auf M bezeichnen wir mit Y(M). Nun ist $\vee$ keine Verknüpfung in Y(M), wie man sehr leicht einsieht. Wir möchten aber für Y(M) ähnliche Sätze wie die in § 1 für X(M) bewiesenen haben. Dazu müssen wir eine neue Verknüpfung einführen, wozu wir die folgende Betrachtung brauchen.

Definition Sei R eine Relation auf M.

Wir definieren

1) $R^1 = R$

2) $(x,y) \in R^{m+1} \leftrightarrow$ es gibt ein z mit $(x,z) \in R^m$ und $(z,y) \in R$.

Folgerungen 1) $(x,y) \in R^m \leftrightarrow$ es gibt ein z mit $(x,z) \in R^n$ und $(z,y) \in R^{m-n}$. $(n \leq m)$

2) $R^m \prec R^n$ wenn $m \leq n$

3) $R \prec S \rightarrow R^m \prec S^m$

4) R Ordnung $\leftrightarrow R^m \prec R$ für mindestens ein $m \geq 2 \leftrightarrow R^n \prec R$ für alle n.

Satz 1 Zu jeder Relation R auf M gibt es genau eine Ordnung S, die folgenden Bedingungen genügt:

a) $R \prec S$

b) $R \prec T$ und T Ordnung $\rightarrow S \prec T$.

Beweis Daß es höchstens eine solche Ordnung gibt, ist offensichtlich. Wir definieren

$$S = \bigvee_{i=1}^{\infty} R^i$$

und behaupten, S erfüllt beide Bedingungen und ist Ordnung.

1) S ist Ordnung, denn $(a,b) \in R^m$ und $(b,c) \in R^n \rightarrow (a,c) \in {}^{m+n}$.

2) S ist offenbar gröber als R

3) $R \prec T$ und T Ordnung $\rightarrow R^m \prec T^m \prec T$
$\rightarrow \bigvee_{m=1}^{\infty} R^m \prec T \rightarrow S \prec T$.

Satz 2 Wenn alle R_i ($i \in I$) Ordnungen sind, ist auch $\bigwedge_{i \in I} R_i$ eine Ordnung.

Definition Mit (R,S) bezeichnen wir die feinste Ordnung, die gröber als R und gröber als S ist. Mit $(R_i;\ i \in I)$ bezeichnen wir die feinste Ordnung, die gröber als alle R_i ist. Nach Satz 1 sind diese Verknüpfungen wohldefiniert.

Satz 3 Sei R_i eine Ordnung für alle $i \in I$ und I totalgeordnet. Wenn aus $i \leqslant j$ folgt $R_i \prec R_j$ ist

$$\bigvee_{i \in I} R_i = (R_i\ ;\ i \in I).$$

Beweis $(a,b) \in \bigvee_{i \in I} R_i$ und $(b,c) \in \bigvee_{i \in I} R_i$
$\rightarrow (a,b) \in R_i$ und $(b,c) \in R_j$ für geeignete i und j. Wenn nun i kleiner ist als j, ist $(a,c) \in R_j$. Sonst ist $(a,c) \in R_i$. Auf jeden Fall ist aber $(a,c) \in \bigvee_{i \in I} R_i$.

Y(M) ist also mit den neuen Verknüpfungen ein Verband. Im Gegensatz zu X(M) ist Y(M) aber nicht einmal modular, wie ein Beispiel im Anhang zeigt. Wir wollen jetzt unsere Sätze für antisymmetrische und konnexe Relationen auf Ordnungen übertragen.

Satz 4 Sei R eine konnexe nicht antisymmetrische Ordnung. Es gibt eine konnexe Ordnung $S \not\leqslant R$.

Beweis Da R nicht antisymmetrisch ist, gibt es ein Paar (a,b), so daß $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R$. Wir definieren S durch:

I $y \neq a$, dann $(x,y) \in S \hookrightarrow (x,y) \in R$

II $y = a$ und $x \neq a$, dann

$(x,y) \in S \hookrightarrow (y,x) \notin R$

III $(a,a) \in S$

S ist eine wohldefinierte Relation.

1) S ist feiner als R.

Es sei $(x,y) \in S$. Ist $y \neq a$ oder $x = y = a$, ist (x,y) wegen I und III in R. Wenn $y = a$ und $x \neq a$, ist $(y,x) \notin R$ und also $(x,y) \in R$.

2) S ist konnex.

Es sei $(x,y) \notin S$. Fall 1) $y \neq a$, dann folgt $(x,y) \notin R$ und also $(y,x) \in R$. Je nachdem $x \neq a$ oder $x = a$, führen nun die Vorschriften I oder II dazu, daß $(y,x) \in S$. Fall 2) $y = a$. Es muß also $x \neq a$ sein. Die Regel II ergibt nun: $(y,x) \in R$ und Regel I zeigt dann, daß $(y,x) \in S$.

3) $S \neq R$.

Denn $(b,a) \in R$ und $(b,a) \notin S$.

4) S ist Ordnung.

Sei $(x,y) \in S$ und $(y,z) \in S$. Da $S \prec R$ gilt $(x,z) \in R$. Wenn $z \neq a$, ist nach I $(x,z) \in S$. Es sei also $z = a$. Wir können nun annehmen $y \neq a$, da sonst nichts zu beweisen ist. Es ist dann nach II $(z,y) \notin R$. Nun ist aber $(x,y) \in R$, da $S \prec R$; es kann also nicht (z,x) in R sein.

Korollare Aus den Sätzen § 1, 1 und § 2, 4 ergeben sich die folgenden Korollare.

1) Sei R eine konnexe Ordnung. R ist genau dann minimal, wenn R auch antisymmetrisch ist.
2) Existiert eine konnexe Relation $S \lesneq R$, so existiert auch eine konnexe Ordnung $T \lesneq R$.
3) Aus Satz 2 ergibt sich: jede konnexe Ordnung umfaßt eine minimale konnexe Ordnung.

Satz 5 Sei R eine konnexe Ordnung. R wird durch die antisymmetrischen Ordnungen $S \prec R$ eindeutig bestimmt.

Beweis Es gilt natürlich $(a,b) \notin R \rightsquigarrow (a,b) \notin S$ für alle $S \prec R$. Angenommen, es gäbe ein Paar $(a,b) \in R$, das in keiner antisymmetrischen Ordnung $S \prec R$ enthalten wäre. R umfaßt nach Korollar 3) von Satz 4 eine minimale konnexe Ordnung und diese ist nach Korollar 1) antisymmetrisch. In dieser Ordnung ist also nach unserer Annahme (a,b) nicht enthalten. Da sie konnex ist, enthält sie also (b,a). Daraus folgt, daß (b,a) in R enthalten ist. Es gibt aber nach Satz 4 eine konnexe Ordnung R', die feiner ist als R und (b,a) nicht enthält. Wenden wir die gleiche Argumentation nun auf R' an, ergibt sich, daß eine antisymmetrische Ordnung existiert, die feiner ist als R' und (a,b) enthält. Solch eine Ordnung ist aber erst recht feiner als R , und unsere Annahme führt zu einem Widerspruch.

Korollar R sei eine konnexe Ordnung

$$R = (S \; ; \; S \prec R \text{ und } S \text{ antisymmetrische Ordnung}).$$

Bemerkung Wenn wir zwei Ordnungen vorgegeben haben mit $T \precneqq R$, und T ist antisymmetrisch und R konnex aber nicht antisymmetrisch, ist es im allgemeinen nicht möglich, nach der Methode von Satz 4 eine konnexe Ordnung S mit $T \prec S \precneqq R$ zu konstruieren. Wenn man zum Beispiel als R die indiskrete Ordnung wählt, hat ein solches S immer ein minimales Element; das heißt ein Element a , so daß $(b,a) \in S \rightarrow b = a$. T braucht aber keinesfalls ein minimales Element zu enthalten.

Satz 6 Sei R eine antisymmetrische Ordnung, die nicht konnex ist. Es existiert eine antisymmetrische Ordnung $S \succneqq R$.

Beweis Da R nicht konnex ist, gibt es ein Paar (a,b), das weder in R noch in R^{-1} enthalten ist. Wir definieren S durch

$I : (x,y) \in S \leftrightarrow (x,y) \in R$ oder ($(x,a) \in R$ und $(b,y) \in R$)

1) R ist offenbar feiner als S.

2) S ist antisymmetrisch.

Es sei $(x,y) \in S$ und $(y,x) \in S$. Wäre weder (x,y) noch (y,x) in R, wären (b,y) und (y,a) in R. Das widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß weder (a,b) noch (b,a) in R enthalten sind. Es sei also etwa $(x,y) \in R$. Wäre (y,x) nicht in R, so ergäbe sich:

$$(b,x) \in R \ , \quad (x,y) \in R \text{ und } (y,a) \in R.$$

Es wäre also wieder $(b,a) \in R$. Die einzige Möglichkeit, die noch übrig bleibt ist $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$. R ist aber antisymmetrisch und also folgt $x = y$.

3) $S \neq R$.

S enthält nämlich (a,b) und $(a,b) \notin R$.

4) S ist Ordnung.

Es sei $(x,y) \in S$ und $(y,z) \in S$. Wir dürfen annehmen, daß $(x,y) \notin R$ oder $(y,z) \notin R$, da wenn beide in R sind, die Behauptung trivial wird. Etwa $(x,y) \notin R$. Dann gilt $(x,a) \in R$ und $(b,y) \in R$. In jedem Fall ist dann $(b,z) \in R$ und also $(x,z) \in S$.

Korollare

1) Eine antisymmetrische Ordnung ist genau dann maximal unter den antisymmetrischen, wenn sie auch konnex ist.

2) Sei R eine antisymmetrische Ordnung. Gibt es eine antisymmetrische Relation $T \supsetneq R$, so gibt es auch eine antisymmetrische Ordnung $S \supsetneq R$.

3) Nach Satz 5 folgt, daß jede antisymmetrische Ordnung feiner als eine maximale ist.

Satz 7 Seien R und T antisymmetrische Ordnungen und $R \not\subseteq T$. Es gibt eine antisymmetrische Ordnung S von der Art, wie sie in Satz 6 konstruiert worden ist, mit $R \not\subseteq S \prec T$.

Beweis T enthält ein Paar (a,b), das nicht in R enthalten ist. Da T antisymmetrisch ist, ist (b,a) nicht in T und also auch nicht in R.

Wir konstruieren S mit dem Paar (a,b) nach der Vorschrift I. S ist antisymmetrisch und gröber als R. S ist aber auch feiner als T; denn $(x,y) \notin T \rightsquigarrow (x,a) \notin T$ oder $(b,y) \notin T$ also erst recht $(x,y) \notin R$, und $(x,a) \notin R$ oder $(b,y) \notin R$. Woraus sich ergibt: $(x,y) \notin S$.

Satz 8 R antisymmetrische und nicht konnexe Ordnung. Sei $T \succ R$ für eine konnexe Ordnung T. Es gibt eine S, das aus R nach der Vorschrift I konstruiert werden kann, mit $R \prec S \prec T$.

Beweis Da R nicht konnex ist, gibt es ein Paar (a,b), das weder in R noch in R^{-1} enthalten ist. T ist konnex; wir dürfen also annehmen, daß etwa (a,b) in T enthalten ist. Wir konstruieren S mit R und (a,b) nach der Vorschrift I. Die weiteren Überlegungen erfolgen genau wie in Satz 7.

Korollar R und T wie im Satz. Es gibt eine konnexe, antisymmetrische Ordnung S mit $R \prec S \prec T$.

Satz 9 Sei R eine antisymmetrische Ordnung. R wird durch die Menge der konnexen Ordnungen $S \succ R$ eindeutig bestimmt.

Beweis Nehmen wir an, es gäbe ein Paar (a,b), das in allen solchen S enthalten wäre, aber nicht in R. Da mindestens eins der S auch antisymmetrisch ist, kann (b,a) nicht in R enthalten sein. Wenn wir (b,a) zu R adjungieren (d.h. nach der Vorschrift I aus Satz 6 eine antisymmetrische Ordnung bilden, die gröber ist als R und (b,a) enthält), erhalten wir eine neue antisymmetrische Ordnung $R' \succneqq R$. Wenden wir die obige Argumentation auf R' an, so ergibt sich, daß es ein konnexes $T \succ R'$ gibt, welches (a,b) nicht enthält. T ist aber auch gröber als R, und unsere Annahme führt zu einem Widerspruch.

Bemerkung Als einfache Folgerung aus dem Satz 9 ergibt sich, daß R der Durchschnitt aller konnexen $S \succ R$ ist. Infolgedessen können wir uns auf die

minimalen konnexen beschränken und erhalten die Aussage: R ist der Durchschnitt aller minimal konnexer Ordnungen, die gröber sind als R. Das Ziel dieser Arbeit ist, kleinere Mengen von konnexen Ordnungen zu finden, so daß R Durchschnitt aller ihrer Elemente ist.

Für unseren nächsten Satz brauchen wir den Begriff der Einschränkung einer Ordnung von M auf einer Untermenge von M. Dieser Begriff wird unabhängig von diesem Satz im nächsten Kapitel eingeführt. Da der Satz aber inhaltlich in dieses Kapitel gehört, beweisen wir ihn hier.

Satz 10 Die minimalen konnexen Ordnungen, T, die gröber sind als eine antisymmetrische Ordnung R sind antisymmetrisch.

Beweis Es sei T eine solche Ordnung. Dann folgt aus $R \prec S \prec T$ und S konnex, daß $S = T$. Nehmen wir an, T sei nicht antisymmetrisch. Es gibt dann ein Paar $(a,b) \in T$, mit $(b,a) \in T$. Wir lassen a fest und definieren:

$$N = \{x \; ; \; (x,a) \in T \text{ und } (a,x) \in T\} \; .$$

N ist nicht leer. Die Einschränkung von T auf N ist indiskret, während die von R antisymmetrisch ist. (Diese Eigenschaften werden in Kapitel 2 bewiesen.) Die Einschränkung von R auf N nennen wir $\hat{R}$. Es gibt eine antisymmetrische und konnexe Ordnung $\hat{S}$ auf N, die gröber ist als $\hat{R}$. Sie ist natürlich auch feiner als die indiskrete Ordnung. Wir definieren

eine Ordnung S auf M.

für $x \neq y$: $(x,y) \in S \rightsquigarrow (x,y) \in T$ und $(y,x) \notin \hat{S}$.

1) $R < S$.

Denn $(x,y) \notin S \rightsquigarrow (x,y) \notin T$ (woraus $(x,y) \notin R$ folgt) oder $(y,x) \in \hat{S}$. Daraus folgt, daß $x \in N$ und $y \in N$ und $(x,y) \notin \hat{R}$. Damit gilt aber auch $(x,y) \notin R$.

2) $S \not\leq T$.

Denn $(a,b) \notin S$ oder $(b,a) \notin S$.

3) S ist konnex.

Sei $(x,y) \notin S$. Das heißt $(x,y) \notin T$ oder $(y,x) \in \hat{S}$. Diese beiden Möglichkeiten schließen sich gegenseitig aus. Es sei also erstens $(x,y) \notin T$. T ist konnex, also gilt $(y,x) \in T$. Es können aber nicht sowonl x als auch y in N sein, da dann $(x,y) \in T$ wäre. Es gilt also $(x,y) \notin \hat{S}$. Ist nun $(y,x) \in \hat{S}$, dann sind x und y beide in N. S ist antisymmetrisch und T ist auf N indiskret. Wir haben also $(y,x) \in T$ und $(x,y) \in \hat{S}$ und also $(y,x) \in S$ in beiden Fällen.

4) S ist eine Ordnung.

Es sei $(x,y) \in S$ und $(y,z) \in S$. Es ist also $(x,z) \in T$. Angenommen $(z,x) \in \hat{S}$; dann sind x und z in N, also insbesondere $(a,x) \in T$ und $(z,a) \in T$. Damit gilt aber auch $(a,y) \in T$ und $(y,a) \in T$ und y ist auch in N. Nun gilt $(y,x) \notin \hat{S}$ und $(z,y) \notin \hat{S}$ und S ist konnex (auf N). Das bedeutet aber, daß $(x,y) \in \hat{S}$ und $(y,z) \in \hat{S}$, und also auch $(x,z) \in \hat{S}$. S ist aber nach unserer Voraussetzung antisymmetrisch; daner ist unsere Annahme unhaltbar, und es muß $(x,z) \in S$ sein.

Unser Satz ist damit bewiesen.

§ 3 Äquivalenzrelationen

Da die Äquivalenzrelationen in der Literatur sehr ausführlich behandelt worden sind (siehe etwa [4]), wollen wir uns hier darauf beschränken, zu zeigen, daß sie einen Unterverband von Y(M) bilden, den wir Z(M) nennen werden, und daß es einen homomorphismus von Y(M) auf Z(M) gibt.

Eine Äquivalenzrelation ist eine symmetrische Ordnung.

Satz 1 Sei R eine symmetrische Relation. R^i ist symmetrisch.

Beweis Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Potenz i. Der Induktionsanfang ist trivial. Nehmen wir an, wir hätten den Satz für alle Potenzen 1 ... n bewiesen. Sei $(x,y) \in R^{n+1}$. Das heißt $(x,a) \in R^n$ und $(a,y) \in R$ für ein $a \in M$. Das bedeutet aber $(y,a) \in R$ und $(a,x) \in R^n$ und also $(y,x) \in R^{n+1}$.

Satz 2 Sei R_i eine symmetrische Relation für alle $i \in I$.

$$\bigvee_{i \in I} R_i \quad \text{und} \quad \bigwedge_{i \in I} R_i \quad \text{sind symmetrisch.}$$

Der Beweis ist trivial.

Aus den Sätzen folgt, daß Z(M) ein Unterverband von Y(M) ist.

Zu jeder Ordnung R definieren wir eine Äquivalenzrelation R durch: $\tilde{R} = R \wedge R^{-1}$.

Es gilt offenbar $R \prec S \rightarrow \tilde{R} \prec \tilde{S}$.

Wir schreiben statt $M/\tilde{R}$ einfach M/R.

Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, daß die Ordnungen auf M/R und die Ordnungen auf M, die gröber sind als $\tilde{R}$, sich eindeutig entsprechen.

Kapitel 2

Abbildungen

Es sei f eine Abbildung von M in N. Jeder Relation R auf N entspricht eine Relation (die wir mit f^* R bezeichnen wollen) auf M. f^* R wird definiert durch:

$$(a,b) \in f^* R \leftrightarrow (f(a),f(b)) \in R$$

für alle a und b aus M. f^* ist offenbar eine Abbildung von X(N) in X(M). In diesem Absatz wollen wir die Eigenschaften von f^* untersuchen.

Satz 1 f^* ist genau dann surjektiv, wenn f injektiv ist.

Beweis a) Sei f injektiv und S eine beliebige Relation. R sei die Relation auf N, die definiert wird durch:

$$(x,y) \in R \leftrightarrow y \notin f(M) \quad \text{oder} \quad (f^{-1}(x),f^{-1}(y)) \in S.$$

R ist offensichtlich in X(N) enthalten und $f^* R = S$.

b) Sei f^* surjektiv. Dann ist die Identität auf M Bild unter f^* . Es gibt also eine Relation R auf N, so daß $id_M = f^* R$. in anderen Worten:

$$(f(a),f(b)) \in R \leftrightarrow a = b \qquad (a,b \in M)$$

Daraus folgt aber:

$$f(a) = f(b) \rightarrow (f(a),f(b)) \in R \rightarrow a = b$$

für beliebige a und b aus M.

Satz 2 f^* ist genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

Beweis a) Sei f^* nicht injektiv. Dann gibt es zwei verschiedene Relationen, R und S auf N, die das gleiche Bild unter f^* haben. Wir können ohne die Allgemeinheit einzuschränken annehmen, daß es ein Paar $(x,y) \in R$ gibt, das nicht zu S gehört. Es können aber jetzt nicht beide Elemente x und y Bilder unter f sein; denn wären sie das, so könnten wir a und b aus M wählen mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$. Das Paar (a,b) wäre dann zwar in f^* R, aber nicht in f^* S, was unmöglich ist. f kann daher nicht surjektiv sein.

b) Sei f nicht surjektiv. Es gibt also ein $z \notin f(M)$. Wir halten z fest. Sei R eine Relation auf $N \setminus \{z\}$. Wir definieren zwei Relationen R' und R'' auf N, die das gleiche Bild unter f haben.

$$(x,y) \in R' \leftrightarrow y = z \quad \text{oder} \quad (x,y) \in R$$
$$(x,y) \in R'' \leftrightarrow x = z \quad \text{oder} \quad (x,y) \in R.$$

Wenn M nicht leer ist, oder N mehr als zwei Elemente hat, sind R' und R'' verschieden.

Bemerkung Satz 2 gilt auch, wenn wir f^* auf $\mathfrak{f}(N)$ einschränken, wie man sofort einsieht. Mit Hilfe von Satz 12 läßt sich auch Satz 1 für die Einschränkung von f^* auf $Y(M)$ beweisen.

Satz 3 a) Wenn R konnex ist, ist auch f^* R konnex.

b) Wenn R symmetrisch ist, ist f^* R auch symmetrisch.

Beweis a) $(a,b) \notin f^* R \rightsquigarrow (f(a),f(b)) \notin R$

$\rightsquigarrow (f(b),f(a)) \in R \rightsquigarrow (b,a) \in f^* R$

b) $(a,b) \in f^* R \rightsquigarrow (f(a),f(b)) \in R$

$\rightsquigarrow (f(b),f(a)) \in R \rightsquigarrow (b,a) \in f^* R$

Satz 4 Sei f surjektiv.

a) Wenn $f^* R$ konnex ist, ist R konnex.

b) Wenn $f^* R$ symmetrisch ist, ist R symmetrisch.

c) Wenn $f^* R$ antisymmetrisch ist, ist R antisymmetrisch.

Beweis Da f surjektiv ist, gibt es zu jedem Element $x \in N$ ein Element $a \in M$, so daß $f(a) = x$. In den folgenden Beweisen sollen x und y immer beliebige Elemente aus N sein und a und b Elemente von M derart, daß $f(a) = x$ und $f(b) = y$.

a) $(x,y) \notin R \rightsquigarrow (a,b) \notin f^* R$

$\rightsquigarrow (b,a) \in f^* R \rightsquigarrow (y,x) \in R$

b) $(x,y) \in R \rightsquigarrow (a,b) \in f^* R$

$\rightsquigarrow (b,a) \in f^* R \rightsquigarrow (y,x) \in R$

c) $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$

$\rightsquigarrow (a,b) \in f^* R$ und $(b,a) \in f^* R$

$\rightsquigarrow a = b \rightsquigarrow x = y$

Satz 5 a) Sei f injektiv. Wenn R antisymmetrisch ist, ist $f^* R$ auch antisymmetrisch.

b) Wenn f nicht injektiv ist, ist $f^* R$ nicht antisymmetrisch für irgendein R.

Beweis a) Seien a und b Elemente von M, für die gilt

$(a,b) \in f^* R$ und $(b,a) \in f^* R$

dann gilt:

$(f(a),f(b)) \in R$ und $(f(b),f(a)) \in R$.

Also $f(a) = f(b)$ und mithin $a = b$.

b) Sei f nicht injektiv. Das heißt, es gibt zwei Elemente a und b aus M, die verschieden sind, aber das gleiche Bild unter f haben. Es gilt dann
$(a,b) \in f^* R$ und $(b,a) \in f^* R$
für beliebige R.

Satz 6 Wenn R eine Ordnung ist, ist $f^* R$ auch eine Ordnung.

Beweis $(a,b) \in f^* R$ und $(b,c) \in f^* R$
$\rightsquigarrow (f(a),f(b)) \in R$ und $(f(b),f(c)) \in R$
$\rightsquigarrow (f(a),f(c)) \in R \rightsquigarrow (a,c) \in f^* R$

Satz 7 Es sei f surjektiv. Wenn $f^* R$ eine Ordnung ist, ist R auch eine Ordnung.

Beweis Es seien x, y und z Elemente aus N und $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$. Seien a, b und c Elemente aus M, für die gilt: $f(a) = x$, $f(b) = y$ und $f(c) = z$. Dann $(a,b) \in f^* R$ und $(b,c) \in f^* R$. Womit dann auch $(a,c) \in f^* R$ ist, und also $(x,z) \in R$.

Zusammenfassung Die Sätze 3 bis 7 haben folgenden Inhalt:
Jede Abbildung f von M in N induziert eine Abbildung f^* von X(N) in X(M). f führt Y(N) und Z(N) jeweils in Y(M) und Z(M) über. Außerdem ist das Bild einer konnexen Relation unter f^* immer konnex. f^* führt genau dann antisymmetrische Relationen in antisymmetrische über, wenn f injektiv ist. Wenn f surjektiv ist, ist das Urbild einer konnexen, antisymmetrischen, symmetrischen oder transitiven Relation (sofern sie ein Urbild hat) immer konnex,

antisymmetrisch, symmetrisch oder transitiv.
Die nächsten beiden Sätze zeigen, daß f^* die Verbandsstruktur von $X(M)$ überträgt.

Satz 8 Es sei f eine Abbildung von M in N und R und S zwei Relationen auf N derart, daß $R \prec S$. Es gilt dann auch $f^* R \prec f^* S$. Die Umkehrung gilt dann und nur dann, wenn f surjektiv ist.

Beweis a) Wir zeigen, aus $(a,b) \in f^* R$ folgt $(a,b) \in f^* S$.

$(a,b) \in f^* R \rightarrow (f(a),f(b)) \in R$

$\rightarrow (f(a),f(b)) \in S \rightarrow (a,b) \in f^* S$

b) Wenn f nicht surjektiv ist, ist f^* nicht injektiv (siehe Satz 2). Es gibt also zwei verschiedene Relationen R und S auf N, die das gleiche Bild unter f haben. R kann nicht sowohl feiner als auch gröber als S sein, da sie sonst gleich wären. Es sei also R etwa nicht feiner als S. Das Bild von R ist aber gleich dem Bild von S und also auch feiner als das Bild von S.

c) Sei f nun surjektiv. Wir benutzen wieder die Konvention, daß $f(a) = x$ und $f(b) = y$ sind.

$(x,y) \in R \rightarrow (a,b) \in f^* R$

$\rightarrow (a,b) \in f^* S \rightarrow (x,y) \in S.$

Satz 9 Sei I ein Indexbereich und für jedes $i \in I$ R_i eine Relation suf N. Wir behaupten:

a) $\bigwedge_{i\in I} f^* R_i = f^* (\bigwedge_{i\in I} R_i)$

b) $\bigvee_{i\in I} f^* R_i = f^* (\bigvee_{i\in I} R_i)$.

Beweis a) $(a,b) \in f^* (\bigwedge_{i\in I} R_i)$

$\rightsquigarrow (f(a),f(b)) \in \bigwedge_{i\in I} R_i$

$\rightsquigarrow (f(a),f(b)) \in R_i$ für alle $i \in I$

$\rightsquigarrow (a,b) \in f^* R_i$ für alle $i \in I$

$\rightsquigarrow (a,b) \in R_i$

b) $(a,b) \in f^* (\bigvee_{i\in I} R_i)$

$\rightsquigarrow (f(a),f(b)) \in \bigvee_{i\in I} R_i$

$\rightsquigarrow (f(a),f(b)) \in R_i$ für ein $i \in I$

$\rightsquigarrow (a,b) \in f^* R_i$ für ein $i \in I$

$\rightsquigarrow (a,b) \in \bigvee_{i\in I} f^* R_i$

Korollare 1) $f^* (R \wedge S) = f^* R \wedge f^* S$

2) $f^* (R \vee S) = f^* R \vee f^* S$

3) $f^* R \prec f^* S \rightsquigarrow$ es gibt ein $S' \succ R$ mit $f^* S' = f^* S$

4) $f^* R \prec f^* S$ es gibt ein $R' \prec S$ mit $f^* R' = f^* R$

Satz 10 Es sei f eine Abbildung von M in N und R eine Relation auf M. Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Relation S auf N existiert und $f^* S = R$ ist, ist:

I: $f(a) = f(b)$ und $f(c) = f(d)$ und $(a,c) \in R$ implizieren $(b,d) \in R$.

Beweis Die Bedingung ist notwendig.

Es sei $R = f^* S$

Dann gilt $(a,c) \in R \rightsquigarrow (f(a),f(c)) \in S$

Wenn also $f(a) = f(b)$ und $f(c) = f(d)$ sind, gilt auch $(b,d) \in R$.

Die Bedingung ist hinreichend. Sei R nun vorgegeben und R erfülle die Bedingung I.

Wir definieren R' durch:

$(x,y) \in R' \leftrightarrow y \notin f(M)$ oder es gibt a und b mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$ und $(a,b) \in R$.

R' ist offenbar wohldefiniert. Wir zeigen nun, daß $f^* R' = R$.

$(a,c) \in f^* R'$

$\leftrightarrow (f(a),f(c)) \in R'$

$\leftrightarrow$ es gibt b und d in M mit $f(b) = f(a)$ und $f(d) = f(c)$ und $(b,d) \in R$

$\leftrightarrow (a,c) \in R$, da R die Bedingung I erfüllt.

Bemerkung Man beachte, daß, wenn R eine Ordnung ist, R' auch eine Ordnung ist. Wir haben also folgendes

Korollar: Wenn R eine Ordnung auf M ist und R ist Bild unter f^*, ist R auch Bild einer Ordnung (auf N) unter f^*.

Der folgende Satz gibt eine Umformulierung der Bedingung I für Ordnungen.

Satz 11 Sei f wieder eine Abbildung von M in N und R Ordnung auf M. Gilt $f^* I_N \prec R$, so ist R Bild einer Ordnung unter f und umgekehrt.

Beweis Wenn R Bild unter f ist, ist R nach Satz 8 gröber als $f^* I_N$. Sei nun $R \succ f^* I_N$.

$f(a) = f(b)$ heißt ja nichts anderes als $(b,a) \in f^* I_N$.

Das gleiche gilt für c und d, wenn $f(c) = f(d)$.

Wenn (b,a) und (c,d) in $f^* I_N$ sind, sind sie auch in R.

Ist dann aber (a,c) in R, so ist dann auch (b,d) in R.

R erfüllt also die Bedingung I.

Korollare 1) Gibt es eine Relation $S \prec R$ auf M, Bild ist unter f^*, so ist - falls R eine Ordnung ist, R auch Bild unter f^*.

2) Sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ R_i eine Ordnung auf N. Wenn f surjektiv ist, gilt:

$$f^* (R_i ; i \in I) = (f^* R_i ; i \in I).$$

Beweis Es ist offensichtlich

$$f^* (R_i ; i \in I) \succ (f^* R_i ; i \in I).$$

Diese letztere Ordnung nennen wir S. Nach Satz 11 ist S nun Bild einer Ordnung; sagen wir T. Nach Satz 8 ist T gröber als alle R_i und also auch als $(R_i ; i \in I)$. Damit ist S aber auch gröber als $f^* (R_i ; i \in I)$, und sie sind gleich.

Bemerkung Wenn f nicht surjektiv ist, gilt die Behauptung nicht, wie wir an einem Gegenbeispiel im Anhang zeigen werden.

Korollar 3) Betrachten wir die Abbildung

$$\iota : M \longrightarrow M/R ,$$

so sehen wir, daß die Abbildung f^* ein Verbandsisomorphismus zwischen $Y(M/R)$ und dem Unterverband von $Y(M)$, der aus allen Ordnungen besteht, die gröber sind als $\tilde{R}$, ist.

Korollar 4) Sei $M \subseteq N$ und f die Einbettung von M in N. f ist dann surjektiv. $f^* R$ wird $R|_M$ geschrieben.

Satz 12 Sei f wieder eine Abbildung von M in N und R eine Ordnung auf M. Wenn R Bild einer Relation auf N ist, ist die feinste Relation S, für die

$f^* S = R$ eine Ordnung.

Beweis Wir geben die feinste Relation an. Seien wieder $f(a) = x$ und $f(b) = y$.

$$(x,y) \in S \leftrightarrow x = y \text{ oder } (a,b) \in R.$$

Wenn also x oder y nicht im Bild von f enthalten ist, heißt $(x,y) \in S$ $x = y$. Es ist offenbar $f^* S = R$. Gilt nun $f^* T = R$, so folgt aus $(x,y) \in S$ $x = y$ oder $(a,b) \in R$, also $(x,y) \in T$. S ist also die feinste Relation, für die $f^* S = R$ gilt. S ist aber eine Ordnung.

Satz 13 Sei f wieder wie in Satz 12. Wenn R eine konnexe Relation auf R ist, die ein Urbild unter f hat, hat R auch ein konnexes Urbild. Wenn R außerdem noch eine Ordnung ist, gibt es eine konnexe Ordnung, so daß $f^* S = R$.

Beweis Mit der gleichen Konvention wie in Satz 12 wird S durch

$$(x,y) \in S \leftrightarrow y \notin f(M) \text{ oder } (a,b) \in R$$

definiert.

Kapitel 3

§ 1 Darstellung einer Relation als Durchschnitt konnexer Relationen

Wir zeigen in diesem Absatz, daß jede Relation als Durchschnitt zweier konnexer dargestellt werden kann. Diese Darstellung ist keinesfalls eindeutig. Diese Konstruktion liefert jedoch keine Ordnungen, wenn die Relation eine Ordnung ist. Der Rest des Kapitels wird sich mit einer Methode, jede Ordnung als Durchschnitt konnexer Ordnungen darzustellen, befassen. Wir wissen schon aus Kapitel 1, daß das immer möglich ist, das Verfahren bringt aber eine wesentlich kürzere Darstellung als die dort angegebene.

Satz 1 Sei R eine Relation auf M.

a) R läßt sich als Durchschnitt $T_1 \wedge T_2$ darstellen, wobei T_1 und T_2 konnex sind.

b) Jedes $S \supseteq R$ läßt sich als $(T_1 \vee S) \wedge (T_2 \vee S)$ darstellen.

Beweis b) ist trivial. Um a) zu beweisen, wählen wir eine beliebige feinste konnexe Relation $T_1 \supset R$. Ein solches T_1 gibt es immer, wir brauchen nur das Urbild einer antisymmetrischen und konnexen Relation auf M/R, die gröber ist als R, zu wählen.

Hilfssatz 1 Aus $(a,b) \notin R$ und $(a,b) \in T_1$ folgt $(b,a) \notin T_1$.

Beweis des Hilfssatzes. Angenommen $(a,b) \in T_1$ und $(b,a) \in T_1$. Dann ist die Relation T:

$$(x,y) \in T \rightarrowtail (x,y) \in T_1 \text{ und } (x,y) \neq (a,b)$$

echt feiner als T_1 und gröber als R .

T_2 definieren wir durch

$$(x,y) \in T_2 \rightarrowtail (x,y) \in R \text{ oder } (y,x) \in T_2 .$$

Wenn nun $(x,y) \in R$, so ist $(x,y) \in T_1 \wedge T_2$.

Ist andererseits $(x,y) \in T_1$ und $(x,y) \notin R$, so folgt aus dem Hilfssatz $(y,x) \notin T_1$ und also $(x,y) \notin T_2$.

Es ist also $R = T_1 \wedge T_2$.

§ 2 Ketten

In diesem Absatz wird eine Verallgemeinerung des Begriffes der Kette eingeführt. Wir beweisen auch einige Hilfssätze über Ketten, die im folgenden sehr nützlich sein werden.

Definition Eine antisymmetrische Ordnung K auf M heißt Kette, wenn es zu K eine Untermenge G(K) gibt, so daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

K1) $K|_{G(K)}$ ist konnex.

K2) $(a,b) \in K \rightarrow a \in G(K)$ und $b \in g(K)$ oder $a = b$

$K|_{G(K)}$ ist nach Korollar 4 von Satz 12 aus Kapitel 2 und Satz 5 aus Kapitel 2 antisymmetrisch. (Man kann es auch leicht direkt einsehen.) Die Elemente von G(K) nennen wir die Glieder der Kette und reden von einer n-gliedrigen Kette K, wenn G(K) genau n Elemente enthält. Wenn K eine zweigliedrige Kette ist und $G(K) = \{a, b\}$ und $(a,b) \in K$, schreiben wir für K $[a,b]$.

Satz 1 Seien T und S antisymmetrische konnexe Ordnungen auf M. $S \wedge T$ ist genau dann eine Kette, wenn aus $(a,b) \in S$ und $(b,a) \in T$ folgt:

1) $(a,x) \in S \rightarrow (x,a) \in T$ und $(a,x) \in T \rightarrow (x,a) \in S$ für alle $x \in M$

oder

2) $(b,x) \in S \rightarrow (x,b) \in T$ und $(b,x) \in T \rightarrow (x,b) \in S$ für alle $x \in M$

Beweis Sei G' die Menge aller $a \in M$, die Bedingung 1 erfüllen. G sei das Komplement von G'. Es ist klar, daß $a \notin G$ und $(a,b) \in S \wedge T$ oder $(b,a) \in S \wedge T$ implizieren, daß $a = b$. Wir müssen also nur zeigen, daß die Einschränkung von $S \wedge T$ auf G konnex ist. Es seien nun a und b aus G und etwa $(a,b) \in S$; $(b,a) \in T$ ist nun unmöglich, da sonst $a \in G'$ oder $b \in G'$. Mithin ist $(a,b) \in S \wedge T$. Die andere Richtung ist trivial.

Satz 2 Sei K eine Kette auf M. Es gibt zwei antisymmetrische konnexe Ordnungen S und T, so daß

$$K = S \wedge T .$$

Hilfssatz 1 Es gibt eine antisymmetrische konnexe Ordnung S gröber als K, für die gilt:

$$(a,b) \in S \text{ und } b \in G(K) \rightharpoonup (a,b) \in K . \qquad (I)$$

Beweis des Hilfssatzes. Sei T die Relation, die folgendermaßen definiert wird:

$$(a,b) \in T \leftrightharpoons b \notin G(K) \text{ oder } (a,b) \in K .$$

T ist konnex; denn $(a,b) \notin T \rightharpoonup b \in G(K)$ und $(a,b) \notin K$. Daraus folgt aber $a \notin G(K)$ oder $(b,a) \in K$, und also $(b,a) \in T$.

T ist Ordnung. Seien $(a,b) \in T$ und $(b,c) \in T$. Wenn $c \notin G(K)$, ist $(a,c) \in T$. Ist $c \in G(K)$, so ist $(b,c) \in K$ und $b \in G(K)$. Dann ist aber $(a,b) \in K$ und also auch $(a,c) \in K$. Mithin ist $(a,c) \in T$.

Offenbar erfüllt jede Ordnung, die feiner als T und gröber als K ist, die Bedingung I. Aus dem Korollar zu Satz 8 aus Kapitel 1, § 2, folgt nun die Existenz einer antisymmetrischen und konnexen

Ordnung S, die I erfüllt. Sei S nun eine solche Ordnung. Wir definieren T durch:

$$(x,y) \in T \leftrightarrow (x,y) \in K \text{ oder } ((y,x) \in S \text{ und } (y,x) \notin K)$$

a) $S \wedge T = K$, denn $(x,y) \notin K$ und $(x,y) \in S \rightarrow (y,x) \notin S$ und also $(x,y) \notin T$

b) T ist konnex. $(x,y) \notin T \rightarrow (x,y) \notin K$ und $(y,x) \notin S$ oder $(y,x) \in K$.
Wenn $(y,x) \in K$ ist, ist (y,x) auch in T. Wenn aber (y,x) nicht in S ist, ist - da S konnex ist - $(x,y) \in S$. Da auch $(x,y) \notin K$ gilt, ist dann auch $(y,x) \in T$.

c) T ist antisymmetrisch. Angenommen, es gäbe $x \neq y$ und $(x,y) \in T$ und $(y,x) \in T$. Da K antisymmetrisch ist, können wir, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, annehmen, daß $(x,y) \notin K$. Dann gilt, da $(x,y) \in T$ ist, $(y,x) \in S$ und $(y,x) \notin K$. Wir wenden nun den gleichen Schluß auf (y,x) an und erhalten $(x,y) \in S$. S ist aber antisymmetrisch, und wir haben einen Widerspruch.

d) T ist eine Ordnung. Angenommen, es gäbe x, y und z, so daß $(x,y) \in T$ und $(y,z) \in T$ und $(x,z) \notin T$. Dann gilt $(x,z) \notin K$. Daher gilt $(x,y) \notin K$ oder $(y,z) \notin K$; etwa $(x,y) \notin K$. Da $(x,y) \in T$ ist, haben wir dann $(y,x) \in S$ und $(y,x) \notin K$. Mithin ist $x \notin G(K)$.
Da $z \neq x$ ist, kann nun (z,x) nicht in K sein (K ist eine Kette). Wäre (z,x) in S, so wäre (x,z) in T entgegen unserer Voraussetzung. Also $(z,x) \notin S$.
Dann gilt $(x,z) \in S$ und also $z \notin G(K)$, da S die Bedingung (I) erfüllt. S ist eine Ordnung. Wir können

also aus $(y,x) \in S$ und $(x,z) \in S$ schließen, daß $(y,z) \in S$. Da $z \notin G(K)$ ist, ist aber (y,z) nicht in K. Aus $(y,z) \in T$ folgt dann $(z,y) \in S$. Damit haben wir einen Widerspruch zur Antisymmetrie von S.

Satz 3 Seien R und S zwei Ordnungen auf M. Gilt für alle Ketten K auf M $K \prec R \rightarrow K \prec S$, so gilt $R \prec S$.

Beweis $(a,b) \in R \rightarrow [a,b] \prec R$

$\rightarrow [a,b] \prec S \rightarrow (a,b) \in S$.

Satz 4 Sei I wohlgeordnet und für alle $i \in I$ K_i eine Kette auf M derart, daß aus $i \leq j$ $K_i \prec K_j$ folgt.

$\bigvee_{i \in I} K_i$ ist eine Kette.

Beweis $\bigvee_{i \in I} K_i$ ist eine antisymmetrische Ordnung. (s.Kapitel 1). Wenn wir $G\left(\bigvee_{i \in I} K_i\right) = \bigcup_{i \in I} G(K_i)$ setzen, so ist es unmittelbar einsichtig, daß die Axiome K1 und K2 erfüllt sind.

Definition Zwei Relationen R und S auf M nennen wir komplementär, wenn

$$R \wedge S = R \wedge S^{-1} = id_M .$$

Satz 5 Wenn R und S komplementär sind, sind auch

a) S und R

b) R und S^{-1}

c) R^{-1} und S

d) R^{-1} und S^{-1} komplementär.

Beweis b) ist trivial. c) folgt aus a) und b). a) und d) sind äquivalent. Wir beweisen a) und d).

$$R^{-1} \wedge S^{-1} = (R \wedge S)^{-1} = id_M$$

$$R^{-1} \wedge S = R^{-1} \wedge (S^{-1})^{-1} = (R \wedge S^{-1})^{-1} = id_M .$$

Satz 6 Seien R und S und R und T jeweils komplementär.

Dann gilt:

a) R und $S \vee T$ sind komplementär;

b) wenn R konnex ist, sind T und S beide die Identität auf M;

c) wenn R' eine feinere Relation als R ist, sind R' und S auch komplementär.

Der Beweis ist trivial.

Satz 7 Sei R eine Ordnung auf M und K eine zu R komplementäre Kette auf M.

$$(R, K) = (R \vee K)^3 .$$

Beweis Wir geben eine Relation S an, für die gilt:

$$R \vee K \prec S \prec (R \vee K)^3 ,$$

und dann zeigen wir, daß S eine Ordnung ist (also transitiv). S definieren wir durch:

$(a,b) \in S \rightarrow (a,b) \in R$ oder es gibt $(x,y) \in K$ mit $(a,x) \in R$ und $(y,b) \in R$.

Es ist klar, daß S gröber ist als $R \vee K$ und feiner als $(R \vee K)^3$. Seien nun (a,b) und (b,c) in S.

Fall 1 $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$. Trivial.

Fall 2 $(a,b) \in R$ und $(b,c) \notin R$ oder $(a,b) \notin R$ und $(b,c) \in R$ Etwa $(b,c) \notin R$. Dann gibt es $(x,y) \in K$, so daß $(b,x) \in R$ und $(y,c) \in R$. Es gilt aber $(a,b) \in R$ und also $(a,x) \in R$. Mithin ist $(a,c) \in S$.

Fall 3 $(a,b) \notin R$ und $(b,c) \notin R$. Dann gibt es also $(v,x) \in K$ und $(y,z) \in K$ (und $v \neq x$ und $y \neq z$), so daß $(a,v) \in R$ und $(x,b) \in R$ und $(b,y) \in R$ und $(z,c) \in R$. v, x, y und z sind alle Glieder von K. Es gilt also $(x,y) \in K$ oder $(y,x) \in K$. Nun ist aber $(x,y) \in R$ und K zu R komplementär. Das bedeutet, daß $x = y$. Da K eine Ordnung ist, ist nun $(v,z) \in K$, und mithin $(a,c) \in S$. Damit sind alle möglichen Fälle erschöpft, und S ist transitiv. S ist also nichts anderes als (R,K).

Satz 8 Wenn R eine antisymmetrische Ordnung ist und K eine zu R komplementäre Kette, so ist (R,K) antisymmetrisch.

Beweis Sei S wieder wie im vorigen Satz. Wir wissen, $S = (R,K)$. Seien $(a,b) \in S$ und $(b,a) \in S$.

Fall 1 $(a,b) \in R$. Dann gilt $(b,a) \notin R$ oder $a = b$. $(b,a) \notin R$ impliziert: es gibt $(x,y) \in K$, $x \neq y$ und $(b,x) \in R$ und $(y,a) \in R$. Dann ist auch $(y,x) \in R$, da R Ordnung ist. Das ist aber unmöglich, da R und K komplementär sind.

(Wenn $(b,a) \in R$, ist der Beweisgang analog.)

Fall 2 $(a,b) \notin R$ und $(b,a) \notin R$. Dann gibt es $(v,x) \in K$ und $(y,z) \in K$ (und $v \neq x$ und $z \neq y$), so daß $(z,a) \in R$ und $(a,v) \in R$ und $(x,b) \in R$ und $(b,y) \in R$. Daraus folgt $(z,v) \in R$ und $(x,y) \in R$. v, x, y und z sind aber Glieder von K. Es gilt daher $(v,z) \in K$ oder $(z,v) \in K$ und $(x,y) \in K$ oder $(y,x) \in K$. Da K und R komplementär sind, folgt $v = z$ und $y = x$. Dann gilt aber $(y,z) \in K$ und $(z,y) \in K$, also $z = y$. Damit haben wir einen Widerspruch zu unserer Annahme.

(R,K) ist also antisymmetrisch.

Satz 9 Sei R eine Ordnung und K eine Kette mit nicht mehr als 2n + 1 Gliedern.

$$(R,K) = (R \vee K)^{2n+1}.$$

Beweis Wir zeigen $(R \vee K)^{2n+2} = (R \vee K)^{2n+1}$.

Angenommen, es gäbe ein Paar (a,b), das in $(R \vee K)^{2n+2}$ enthalten wäre, aber nicht in $(R \vee K)^{2n+1}$.

Dann gäbe es eine Folge von 2n+1 Elementen $x_1 \dots x_{2n+1}$ mit $(a,x_1) \in R \vee K$, $(x_i,x_{i+1}) \in R \vee K$ und $(x_{2n+1},b) \in R \vee K$ $(i = 1 \dots 2n)$. Diese Folge wäre unverkürzbar.

Es müßte also eine der beiden Aussagen gelten:

1) $(a,x_1) \in R$, $(x_{2i},x_{2i+1}) \in R$, $(x_{2i-1},x_{2i}) \in K$ und $(x_{2n+1},b) \in K$ $(i = 1 \dots n)$ oder

2) $(a,x_1) \in K$, $(x_{2i},x_{2i+1}) \in K$, $(x_{2i-1},x_{2i}) \in R$ und $(x_{2n+1},b) \in R$. $(i = 1 \dots n)$

In jedem Fall wären $x_1 \dots x_{2n+1}$ alle Glieder von K, da sonst die Folge verkürzbar wäre. Im Fall 1 wäre b auch ein Glied von K, und im Fall 2 a. Nehmen wir an, a sei Glied von K. Nun sind die x_i alle verschieden, und K hat höchstens 2n+1 Glieder. Also muß $a = x_i$ für ein i zwischen 1 und 2n+1. Dann gibt es aber eine kürzere Folge und (a,b) ist in $(R \vee K)^{2n+1}$.

Damit ist der Satz beiwesen.

Statt (R, [a,b]) schreiben wir jetzt $R[a,b]$.

$R[a,b]$ ist also die feinste Ordnung, die gröber ist als R und (a,b) enthält.

Korollar $(x,y) \in R[a,b] \rightarrow (x,y) \in R$ oder $(x,a) \in R$ und $(b,y) \in R$.

Wir beweisen jetzt noch ein Lemma, das wir in den folgenden Absätzen häufig brauchen werden.

Satz 10 Es sei R eine Ordnung auf M und a, b, c und d Elemente von M. Es gelte $(d,a) \notin R$ oder $(b,c) \notin R$.
(Das ist zum Beispiel der Fall, wenn $(d,c) \notin R[a,b]$ oder $(b,a) \in R[c,d]$.)
Es gilt dann:

a) $R[a,b][c,d] = R[a,b] \vee R[c,d] \vee R[a,d]$, wenn $(b,c) \in R$.

b) $R[a,b][c,d] = R[a,b] \vee R[c,d] \vee R[c,b]$, wenn $(d,a) \in R$.

c) $R[a,b][c,d] = R[a,b] \vee R[a,d]$, wenn $(b,c) \notin R$ und $(d,a) \notin R$.

Beweis b) gent aus a) durch Vertauschen von (a,b) und (c,d) hervor. Wir beweisen also nur a) und c).

a) Es ist klar, daß $R[a,b][c,d]$ die Paare (a,b), (c,d) und (a,d) enthält. Sei (x,y) ein Paar, das in $R[a,b][c,d]$ enthalten ist, aber weder in $R[a,b]$ noch in $R[c,d]$. (Wenn es keine solchen Paare gibt, ist der Beweis fertig.) Es gilt dann $(x,c) \notin R$ oder $(d,y) \notin R$. (x,c) und (d,y) sind aber in $R[a,b]$ enthalten. Wäre (d,y) nicht in R, so müßten (d,a) und (b,y) in R sein. Nach unserer Voraussetzung ist aber (d,a) nicht in R enthalten, da $(b,c) \in R$. Es gilt also $(d,y) \in R$. Jetzt darf (x,c) nicht in R sein, da sonst $(x,y) \in R[c,d]$. Also muß $(x,c) \in R[a,b]$ sein, und mithin $(x,a) \in R$. Damit ist aber (x,y) in $R[a,d]$ enthalten.

c) Es ist wieder klar, daß $R[a,b][c,d]$ (a,b) und (c,d) enthält. Wir wählen ein Paar (x,y), das in $R[a,b][c,d]$ enthalten ist, aber nicht in $R[a,b]$. (Wenn das unmöglich ist, ist weiter nichts zu beweisen.) Nun gilt $(x,c) \in R[a,b]$ und $(d,y) \in R[a,b]$. Wäre $(x,c) \notin R$, so wären (x,a) und (b,c) in R. Wäre $(d,y) \notin R$, so wären (d,a) und (b,y) in R. Beide Annahmen führen also zu einem Widerspruch gegen unsere Voraussetzungen. (x,y) ist also in $R[c,d]$ enthalten.

§ 3 Zwei Zerlegungssätze

Aufgrund der Ergebnisse von Kapitel 2 dürfen wir im folgenden, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, annehmen, die Ordnung R, die wir als Durchschnitt darstellen wollen, sei antisymmetrisch. Wir nehmen in diesem Absatz an, daß wir R als Durchschnitt aller S aus einer Familie $\mathfrak{T}$ von Ordnungen darstellen können und suchen Bedingungen dafür, daß es zu jedem S ein $T_S \succ S$ gibt, so daß T_S für alle S aus $\mathfrak{T}$ eine konnexe Ordnung ist und

(1) $\bigwedge_{S \in \mathfrak{T}} T_S = R.$

Unser erster Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür, daß (1) für beliebige konnexe Ordnungen $T_S \succ S$ gilt. Der zweite Satz gibt hinreichende Bedingungen dafür, daß es solche T_S gibt, die (1) genügen.

Satz 1 Sei R eine antisymmetrische Ordnung auf M. $\mathfrak{T}$ sei eine Familie von antisymmetrischen Ordnungen, die folgende Bedingungen erfüllt:

a) $S \succ R$ für alle $S \in \mathfrak{T}$

b) Für jedes Paar (x,y) folgt aus $(x,y) \notin R$ und $(y,x) \notin R$, es gibt S und S' aus $\mathfrak{T}$, so daß $(x,y) \in S$ und $(y,x) \in S'$.

Für jede Familie $\mathfrak{Z}$ von antisymmetrischen Ordnungen T_S, für die gilt $T_S \succ S$, gilt $\bigwedge_{S \in \mathfrak{T}} T_S = R$.

Bemerkung Insbesondere gilt auch die Behauptung für jede Familie von konnexen, antisymmetrischen Ordnungen, mit $T_S \succ S$, und solche Familien gibt es nach Kapitel 1, § 2, Satz 6, Korollar 3.

Beweis Offensichtlich gilt:

$$\bigwedge_{S \in \mathfrak{F}} T_S \succ R.$$

Sei $(x,y) \notin R$. Wenn $(y,x) \in R$, gilt für alle T_S $(y,x) \in T_S$ und also $(x,y) \notin T_S$. Dann ist aber $(x,y) \notin \bigwedge_{S \in \mathfrak{F}} T_S$. Wenn $(y,x) \notin R$ ist, gibt es ein S' mit $(y,x) \in S'$. Dann ist aber $(y,x) \in T_{S'}$, und also $(x,y) \notin T_{S'}$. Mithin ist $(x,y) \notin \bigwedge_{S \in \mathfrak{F}} T_S$, was wir beweisen wollten.

Satz 2 R wie in Satz 1. Sei $\mathfrak{F}$ eine Familie von antisymmetrischen Ordnungen mit $R = \bigwedge_{S \in \mathfrak{F}} S$, die folgenden Bedingungen genügt:

A) Wenn K eine zu allen $S \in \mathfrak{F}$ komplementäre Kette ist, ist K die Identität auf M.

B) Es sei $[a,b]$ komplementär zu S und $(a,b) \in S'$ (S und $S' \in \mathfrak{F}$); dann gilt:

$(x,y) \in S$ $[b,a] \rightharpoonup (x,y) \in S$

oder $(y,x) \in S''$ für ein $S'' \in \mathfrak{F}$.

C) $(a,b) \in S$ und $(b,c) \in S'$ (S und $S' \in \mathfrak{F}$)

$\rightharpoonup (a,c) \in S''$ für ein $S'' \in \mathfrak{F}$.

Behauptung Es gibt eine Familie $\mathfrak{T}$ von konnexen Ordnungen T_S, so daß $T_S \succ S$ für alle $S \in \mathfrak{F}$ und

$$\bigwedge_{S \in \mathfrak{F}} T_S = R.$$

Um die Behauptung zu beweisen, brauchen wir folgenden

Hilfssatz: Es gibt zu jedem $S \in \mathfrak{S}$ eine konnexe und antisymmetrische Ordnung $T_S \succ S$, für die gilt:

D) $(x,y) \in T_S \rightarrow (x,y) \in S$ oder $(y,x) \in S'$ für ein $S' \in \mathfrak{S}$.

Beweis des Hauptsatzes. Wir zeigen, wie der Hauptsatz aus dem Hilfssatz folgt. Es sei $\mathfrak{T}$ eine Familie von T_S ($S \in \mathfrak{S}$), die D genügen. (Zu jedem $S \in \mathfrak{S}$ ein T_S). Es ist offensichtlich

$$\bigwedge_{S \in \mathfrak{S}} T_S \succ R.$$

Wenn nun $(x,y) \notin R$, gibt es ein $S' \in \mathfrak{S}$ mit $(x,y) \notin S'$. Wäre nun (x,y) in allen T_S enthalten, wäre es insbesondere in $T_{S'}$ enthalten. Da $T_{S'}$ die Forderung D erfüllt, gibt es ein $S'' \in \mathfrak{S}$ mit $(y,x) \in S''$. Dann ist aber $(y,x) \in T_{S''}$. $T_{S''}$ ist also nicht antisymmetrisch, im Gegensatz zur Voraussetzung.

Beweis des Hilfssatzes. Wir wählen ein S fest aus $\mathfrak{S}$. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller antisymmetrischen Ordnungen $T \succ S$, die die Bedingung D und auch noch die folgende Bedingung erfüllen:

E) Wenn $[a,b]$ komplementär zu T ist und $(b,a) \in S'$ für ein S' und $(x,y) \in T\,[a,b]$, gilt:

$(x,y) \in T$ oder $(y,x) \in S''$ für ein $S'' \in \mathfrak{S}$.

$\mathfrak{M}$ ist nicht leer, denn $S \in \mathfrak{M}$. Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{M}$ maximale Elemente besitzt und dann, daß diese maximalen Elemente konnex sind.

a) Es sei I eine totalgeordnete Menge und $T_i \in \mathfrak{M}$ für alle $i \in I$. Ferner gelte $i \leq j \rightarrow T_i \prec T_j$ für beliebige $i, j \in I$. Wir behaupten $\bigvee_{i \in I} T_i \in \mathfrak{M}$.
Nach Satz 3b aus Kapitel 1, §1 und Satz 3 aus Kapitel 1, §2 ist $\bigvee_{i \in I} T_i$ eine Ordnung.
Wir nennen $\bigvee_{i \in I} T_i$ jetzt einfach T.
T erfüllt D. Sei $(x,y) \in T$; dann ist $(x,y) \in T_i$ für ein $i \in I$. Daraus folgt, da T_i D erfüllt, daß $(x,y) \in S$ oder $(y,x) \in S'$ für ein $S' \in \mathfrak{S}$.
T erfüllt E. Sei $[a,b]$ komplementär zu T und $(b,a) \in S'$ für ein $S' \in \mathfrak{S}$. Sei $(x,y) \in T[a,b]$ und $(x,y) \notin T$. Daraus folgt $(x,a) \in T$ und $(b,y) \in T$ und also $(x,a) \in T_i$ und $(b,y) \in T_j$ für gewisse i und j aus I. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $i \geq j$, und also $(b,y) \in T_i$. Nun ist, da $[a,b]$ zu T komplementär ist, $[a,b]$ erst recht komplementär zu T_i. T_i erfüllt aber E,und daher gibt es ein S'' , für das $(y,x) \in S''$. T erfüllt also auch E.

Nach dem Zornschen Lemma hat $\mathfrak{M}$ also maximale Elemente.

b) Die maximalen Elemente von $\mathfrak{M}$ sind konnex. Sei $T \in \mathfrak{M}$ und T nicht konnex. Es gibt also ein Paar (a,b), das weder in T noch in T^{-1} enthalten ist. Da $T \succ S$, gilt auch für S : $(a,b) \notin S$ und $(b,a) \notin S$. Nach der Bedingung A dürfen wir also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, $(b,a) \in S'$ für ein $S' \in \mathfrak{S}$.
Wir behaupten, $T[a,b]$ ist in $\mathfrak{M}$ enthalten. Nach Satz 8 aus § 2 ist $T[a,b]$ eine antisymmetrische Ordnung, und $T[a,b]$ umfaßt trivialerweise S. $T[a,b]$ erfüllt D, da T die Bedingung E erfüllt. Wir behaupten,

$T[a,b]$ erfüllt E. Sei also $[c,d]$ komplementär zu $T[a,b]$ und $(d,c) \in S''$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $(d,a) \notin T$. Dann ist $T[a,b][c,d] = T[a,b] \vee T[c,d]$, wenn $(b,c) \in T$ und $T[a,b][c,d] = T[a,b] \vee T[c,d] \vee T[a,d]$ sonst. (s.Satz 10 aus § 2.)

Sei nun $(x,y) \in T[a,b][c,d]$. Wenn $(x,y) \in T[a,b]$ oder $(x,y) \in T[c,d]$ gilt, da T E erfüllt, $(x,y) \in T$ oder $(y,x) \in \hat{S}$ für ein $\hat{S} \in \mathfrak{S}$. Nehmen wir nun an, daß (x,y) weder in $T[a,b]$ noch in $T[c,d]$ enthalten ist. Dann ist $(b,c) \in T$ und also $(a,c) \in T[a,b]$. Wäre nun $(a,c) \in T$, so wäre $(a,d) \in T[c,d]$, und dies haben wir ausgeschlossen. Es ist also $(c,a) \in \bar{S}$ für ein $\bar{S} \in \mathfrak{S}$ und $(d,c) \in S''$. Da $\mathfrak{S}$ die Bedingung C erfüllt, ist also $(d,a) \in \tilde{S}$ für ein $\tilde{S} \in \mathfrak{S}$. Da T die Bedingung E erfüllt, ist also auch in diesem Fall $(y,x) \in \hat{S}$ für ein geeignetes $\hat{S} \in \mathfrak{S}$.

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

§ 4 Unabhängige Systeme

Wir betrachten in den nächsten beiden Abschnitten eine feste antisymmetrische Ordnung R auf M und suchen Systeme von antisymmetrischen Ordnungen, die die Voraussetzungen eines der beiden Sätze des vorigen Absatzes erfüllen. Wie wir dort schon bemerkt haben, ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, R als antisymmetrisch anzunehmen. In diesem Absatz werden auf naheliegende Weise gewisse Systeme $\mathfrak{T}$, die der Bedingung $\bigwedge_{S \in \mathfrak{T}} S = R$ genügen, eingeführt und deren Eigenschaften untersucht. Im nächsten behandeln wir dann eine spezielle Unterklasse dieser Systeme.

Es sei $\mathfrak{T}$ eine Menge von antisymmetrischen Ordnungen $S \succ R$ und P eine Untermenge von $M \times M$, für die gilt: $(a,b) \in P \rightharpoonup (b,a) \in P$ und $a \neq b$. Eine Untermenge von P nennen wir zulässig, wenn

$$(a,b) \in Q \rightharpoonup (b,a) \notin Q.$$

Wir schreiben dann $Q \in \mathrm{Zul}(P)$.

Definition Das Paar $(\mathfrak{T}, P)$ heißt unabhängiges R-System, wenn

$$U) \quad S \in \mathfrak{T} \rightharpoonup S = (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q)) \text{ für ein } Q \in \mathrm{Zul}(P).$$

Erläuterung Die Definition bedeutet, daß für jede zulässige Untermenge Q von P die feinste Ordnung, die R umfaßt und alle Paare (a,b) aus Q enthält, in $\mathfrak{T}$ enthalten ist, und daß $\mathfrak{T}$ umgekehrt gerade aus allen so erhältlichen Ordnungen besteht.

Satz 1 Sei $(x,y) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q))$ für irgendein Q (Q nicht notwendig zulässig). Es gibt eine endliche Untermenge Q' von Q mit

$$(x,y) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q')).$$

Beweis Sei S die Relation, die folgendermaßen definiert wird:

$$(x,y) \in S \rightarrow (x,y) \in (R,([a,b] ; (a,b) \in Q))$$

und der Satz gilt für (x,y).

S ist offenbar feiner als $(R,([a,b] ; (a,b) \in Q))$. Andererseits enthält S alle (a,b) aus Q. Wenn S eine Ordnung ist, ist also $\mathbf{S} = (R,([a,b] ; (a,b) \in Q))$ und damit der Satz bewiesen. Seien also $(x,y) \in S$ und $(y,z) \in S$. Dann gibt es zwei endliche Untermengen Q' und Q'' von Q, so daß:

$$(x,y) \in (R,([a,b] ; (a,b) \in Q')) \text{ und}$$
$$(y,z) \in (R,([a,b] ; (a,b) \in Q'')) .$$

Dann gilt aber:

$$(x,z) \in (R,([a,b] ; (a,b) \in Q' \cup Q''))$$

und $Q' \cup Q''$ ist endlich. Damit ist der Satz bewiesen. Der folgende Satz ist in gewisser Hinsicht eine Verschärfung von Satz 10 aus § 2.

Satz 2 Es sei $(x,y) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q))$ und $(x,y) \notin (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q'))$ für jede echte Untermenge Q' von Q. Dann ist Q endlich, und die Paare von Q lassen sich so anordnen, daß - falls Q n Elemente besitzt - gilt:

$$(x,a_1) \in R,\ (b_i,a_{i+1}) \in R \text{ für } i = 1 \ldots n-1 \text{ und}$$
$$(b_n,y) \in R .$$

Beweis Daß Q endlich ist, folgt aus Satz 1. Für die Fälle n = 1 und n = 2 ist der Satz eine direkte Folge aus den Sätzen 9 und 10 in Absatz 2. Für den Induktionsbeweis brauchen wir folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz Es gibt ein Paar $(a,b) \in Q$ mit $(b,y) \in R$.

Beweis des Hilfssatzes. Wir beweisen auch diesen Satz durch Induktion. Falls Q nur ein Paar enthält, gilt ja der Hauptsatz und damit erst recht der Hilfssatz. Q habe nun n Elemente, und der Satz sei wahr für alle Q' mit n-1 oder weniger Elementen. Sei Q' eine Untermenge von Q mit n-1 Elementen und:

$$S = (R, ([a,b] \; ; (a,b) \in Q')) .$$

Q enthält höchstens ein Paar, welches nicht in S ist. Da aber $(x,y) \notin S$, gibt es genau ein solches Paar, etwa (a',b'). Es gilt $(x,y) \in S [a',b']$ und somit $(b',y) \in S$. Entweder ist nun (a',b') das gesuchte Paar oder $(b',y) \in (R, ([a,b] \; ; (a,b) \in Q''))$ für eine Untermenge von Q', die minimal und nicht leer ist. Q'' enthält aber höchstens n-1 Elemente, und also gibt es ein Paar $(a,b) \in Q''$ mit $(b,y) \in R$.

Beweis des Hauptsatzes. Es sei etwa $(b_n,y) \in R$ und $Q' = Q \setminus \{(a_n,b_n)\}$ und $S = (R, ([a,b] \; ; (a,b) \in Q'))$ Es gilt $(x,y) \notin S$ und $(x,y) \in S [a_n,b_n]$. Also gilt $(x,a_n) \in S$. Es gilt aber

$$(x,a_n) \notin (R, ([a,b] \; ; (a,b) \in Q'')) \text{ für jedes}$$

Q'', das in Q' echt enthalten ist, da sonst

$$(x,y) \in (R, ([a,b] \; ; (a,b) \in Q'' \cup \{(a_n,b_n)\}))$$

und $Q'' \cup \{(a_n,b_n)\}$ ist echt enthalten in Q. Wenden wir nun die Behauptung auf (x,a_n) und Q' an (Q' hat ja n-1 Elemente), so ergibt sich bei passender Nummerierung:

$$(x,a_1) \in R \ , \ (b_i,a_{i+1}) \in R \quad \text{für } i = 1 \ldots n-1 \ .$$

Nehmen wir noch (b_n,y) R hinzu, ist damit der Satz bewiesen. Wir nennen jetzt eine endliche Menge von Paaren, die auf diese Weise angeordnet ist, normal angeordnet.

Satz 3 Sei $(x,y) \notin R$ und $(\mathfrak{S}, P)$ ein unabhängiges R-System. Es gibt ein $S \in \mathfrak{S}$, mit

$$(x,z) \in S \rightarrow (x,z) \in R \quad \text{und}$$
$$(z,y) \in S \rightarrow (z,y) \in R \ .$$

Beweis Wir betrachten die folgende Untermenge Q' von P.

$$(a,b) \in Q' \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} (a,b) \in P \text{ und } [((x,b) \in R \quad \text{und} \\ (x,a) \notin R \ ) \text{ oder } ((a,y) \in R \text{ und} \\ (b,y) \notin R \ )] . \end{cases}$$

Es gilt $(a,b) \in Q' \rightarrow (b,a) \notin Q'$. In der Tat wäre $(a,b) \in Q'$ und $(b,a) \in Q'$, so müßte entweder $(x,a) \in R$ und $(a,y) \in R$ oder $(x,b) \in R$ und $(b,y) \in R$ gelten. Beides ist aber unmöglich. Es gibt also eine zulässige Untermenge Q von P, die Q' umfaßt. Sei S die zu dieser Menge gehörige Ordnung. S ist unsere gesuchte Ordnung. Wäre nämlich etwa $(x,z) \in S$, müßte es eine minimale endliche Untermenge Q'' von Q geben mit

$$(x,z) \in (R, ([a,b] \ ; \ (a,b) \in Q'')) \ .$$

Gäbe es ein Paar $(a,b) \in Q''$ mit $(x,a) \in R$, wäre aber auch $(x,b) \in R$ und also Q'' nicht minimal, Q'' muß also leer sein.

Korollar Sei $(\mathfrak{S}, P)$ ein unabhängiges R-System. Es gilt

$$\bigwedge_{S \in \mathfrak{S}} S = R .$$

Es ist klar, daß es zu einer Menge P von Paaren höchstens ein unabhängiges R-System gibt, da P die Ordnungen S vollständig bestimmt. Der folgende Satz zeigt nun, daß, wenn $(\mathfrak{S}, P)$ ein unabhängiges R-System ist, P durch die Vorgabe von $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmt wird. Daraus ergibt sich dann ein Kriterium dafür, wann eine Menge von antisymmetrischen Ordnungen ein unabhängiges R-System mit einer geeigneten Menge von Paaren bildet. Wir werden dann auch die Menge der Ordnungen ein unabhängiges R-System nennen und die Paarmenge nur noch dazu schreiben, wenn wir sie explizit brauchen.

Satz 4 Es sei $(\mathfrak{S}, P)$ ein unabhängiges R-System und $(x,y) \in S$ und $(y,x) \in S'$ für gewisse S und S'. Wenn $x \neq y$, gilt: es gibt genau eine endliche Untermenge von P, $P' = \{(a_1,b_1) \ldots (a_n,b_n)\}$, mit

$$x = a_1, b_i = a_{i+1}, a_i \neq b_{i+1} \text{ und } b_n = y \quad i = 1 \ldots n-1 .$$

Hilfssatz 1 Seien Q und Q' zwei endliche Untermengen von P mit $(a,b) \in Q \rightharpoonup (b,a) \notin Q$ und

$$(a,b) \in Q' \rightharpoonup (b,a) \notin Q'$$

und $(x,y) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q))$ und

$$(y,x) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q')) .$$

Es gilt $Q^{-1} \frown Q' \neq \emptyset$

$$((a,b) \in Q^{-1} \leftrightarrow (b,a) \in Q)$$

Beweis Angenommen $Q^{-1} \cap Q' = \emptyset$, dann gilt

$$(a,b) \in Q \cup Q' \rightarrow (b,a) \notin Q \cup Q' \ .$$

Es gibt also eine zulässige Untermenge von P (etwa Q''), die $Q \cup Q'$ umfaßt. Sei S'' die zu Q'' gehörige Ordnung. S'' ist nicht antisymmetrisch, da $(x,y) \in S''$ und $(y,x) \in S''$. Dies widerspricht aber der Annahme, daß ($\mathfrak{F}$,P) ein unabhängiges R-System ist.

Hilfssatz 2 Sei P' eine Menge der gesuchten Art. Es gilt $(a,b) \in P' \rightarrow (b,a) \notin P'$

Beweis P' sei normal angeordnet. Wenn es überhaupt Paare gibt mit $(a,b) \in P'$ und $(b,a) \in P'$, können wir ein Paar (a,b) finden, so daß, wenn (a',b') zwischen (a,b) und (b,a) liegt, (b',a') es nicht tut. Sei (a,b) ein solches Paar. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, daß (a,b) vor (b,a) in der normalen Anordnung von P' vorkommt. Es sei P'' die Menge der Paare, die zwischen (a,b) und (b,a) liegen (ohne (a,b) und (b,a) selbst). P'' ist nicht leer, weil $a_i \neq b_{i+1}$ in P'. Es kommen in P'' zwei Paare der Form (b,c) und (d,b) vor. Ferner erfüllt P'' :

$$(u,v) \in P'' \rightarrow (v,u) \notin P'' \ .$$

Es gibt also eine zulässige Untermenge von P, die P'' umfaßt. Sei S'' die zu dieser Menge gehörige Ordnung von $\mathfrak{F}$ .Es gilt $(c,d) \in S''$, $(d,b) \in S''$ und $(b,c) \in S''$. Dann folgt aber $(d,c) \in S''$ und also c = d. Das ist aber ein Widerspruch zu unserer Wahl von (a,b).

Hilfssatz 3 Es gibt höchstens eine Menge der gesuchten Art.

Beweis Seien P' und P'' zwei verschiedene Mengen der gesuchten Art. Nach Hilfssatz 1 gilt $P' \cap P'' \neq \emptyset$. Wir beweisen nun die Behauptung durch Induktion nach der Anzahl der Elemente von P' .

n = 1 Wenn P' nur aus dem Paar (a,b) besteht, gilt x = a und b = y und (x,y) kommt in P'' vor. Käme noch ein Paar vor, so käme entweder ein Paar der Form (y,z) mit $z \neq x$ oder eines der Form (z,x) mit $z \neq y$ vor. Wir nehmen das erstere an. Nach Hilfssatz 2 gibt es aber eine Ordnung aus mit $(y,z) \in S''$ und (nach der Definition von P'') $(z,y) \in S''$. Daraus folgt aber z = y,und das ist unmöglich.

Induktionsschritt Der Satz gelte für alle $i \leq n-1$, und P' habe n Elemente, und es sei (a,b) ein Paar aus P', das auch in P'' vorkommt. Wir betrachten die Mengen

$$V = \{ (u,v) \; ; \; (u,v) \text{ kommt nach } (a,b) \text{ in der normalen Anordnung von } P' \}$$

$$V' = \{ (u,v) \; ; \; (u,v) \text{ kommt nach } (a,b) \text{ in } P'' \}$$

V und V' sind von der gesuchten Art für (b,y), und V hat höchstens n-1 Elemente. V und V' sind also identisch. Der gleiche Schluß für den vorderen Teil von P' ergibt nun die Behauptung.

Beweis des Hauptsatzes.

Es gibt nach Satz 1 endliche Untermengen der zulässigen Mengen, die zu S und S'' gehören, so daß

$$(x,y) \in (R, ([a,b] \; ; (a,b) \in Q))$$
$$(y,x) \; (R, ([a,b] \; ; (a,b) \in Q')) .$$

Wir wählen Q und Q' so, daß es keine Mengen gibt, die das gleiche leisten und weniger Elemente enthalten. Wir behaupten, Q ist von der gesuchten Art. (Dann folgt aus Hilfssatz 3 $Q^{-1} = Q'$.) Nach Hilfssatz 1 gilt auf jeden Fall $Q^{-1} \cap Q \neq \emptyset$. Wir führen den Beweis wieder durch Induktion nach der Anzanl der Elemente von Q.

n = 1 Q besteht also nur aus dem Paar (a,b). Es gilt also $(x,a) \in R$ und $(b,y) \in R$, ($(x,y) \in R$ ist offensichtlich unmöglich) und (b,a) kommt in Q' vor. Daraus folgt $(a,x) \in S'$ und $(y,b) \in S'$. S' ist aber gröber als R und also a = x und b = y .

Induktionsschritt Der Satz gelte für alle $i \leq m-1$, und Q besitze m Elemente. Wir ordnen Q und Q' auf normale Weise:

$$Q = \{(a_1,b_1) \quad \dots \quad (a_m,b_m)\}$$
$$Q' = \{(a'_1,b'_1) \quad \dots \quad (a'_n,b'_n)\}$$

Nun sei (a_k,b_k) ein Paar aus Q, für das gilt:

$$(a_k,b_k) = (b'_1,a'_1) \text{ für ein Paar } (a'_1,b'_1) \text{ aus } Q' .$$

Wir betrachten das Paar (x,a_k) und die Mengen

$$V = \{(a_1,b_1) \quad \dots \quad (a_{k-1},b_{k-1})\}$$
$$V' = \{(a'_1,b'_1) \quad \dots \quad (a'_{l-1},b'_{l-1})\} .$$

Und beachten, daß V und V' die Voraussetzungen des Satzes erfüllen und V höchstens m-1 Elemente enthält. Nach der Induktionsvoraussetzung ist also V von der gesuchten Art für (x,a_k). Die gleiche Betrachtung für den hinteren Abschnitt von Q liefert nun das gewünschte Ergebnis.

Korollar Sei $(\mathfrak{S}, P)$ ein unabhängiges R-System, (a,b) ist genau dann in P, wenn für jede Ordnung S aus $(a,b) \in S$ oder $(b,a) \in S$ und es zwei Ordnungen S und S' aus $\mathfrak{S}$ gibt mit $(a,b) \in S$ und $(b,a) \in S'$.

Definition Es seien $(\mathfrak{S}, P)$ und $(\mathfrak{S}', P')$ zwei unabhängige R-Systeme. Wir nennen $\mathfrak{S}$ feiner als $\mathfrak{S}'$ (in Zeichen $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{S}'$), wenn $P \subseteq P'$ (als Menge). Es ist klar, daß diese Relation eine antisymmetrische Ordnung auf der Menge der unabhängigen R-Systeme ist.

Satz 5 Seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zwei unabhängige R-Systeme. $\mathfrak{S}$ ist genau dann feiner als $\mathfrak{S}'$, wenn $\mathfrak{S}'$ in disjunkte Mengen $\mathfrak{S}'_S$ zerfällt ($S \in \mathfrak{S}$) und es eine Menge von Paaren P gibt, so daß $(\mathfrak{S}'_S, P)$ ein unabhängiges S-System ist für alle S.

Beweis Trivial.

Satz 6 Es sei A eine wohlgeordnete Menge von Indizes und für jedes $\alpha \in A$ $(\mathfrak{S}_\alpha, P_\alpha)$ ein unabhängiges R-System. Es gelte $\alpha \leq \beta \rightarrow \mathfrak{S}_\alpha \leq \mathfrak{S}_\beta$. Es gibt ein R-System $(\mathfrak{S}, P)$, so daß $\mathfrak{S}_\alpha \leq \mathfrak{S}$ für alle $\alpha \in A$.

Beweis Sei $P = \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha$.

Wir müssen zeigen, daß für jede zulässige Untermenge Q von P (R, ($[a,b]$; $(a,b) \in Q$)) antisymmetrische Ordnung ist, das heißt, daß $(\mathfrak{S}, P)$ überhaupt ein unabhängiges R-System ist. Der Rest ist dann evident. Es sei also Q eine zulässige Untermenge und $(x,y) \in$ (R, ($[a,b]$; $(a,b) \in Q$)) und $(y,x) \in$ (R, ($[a,b]$; $(a,b) \in Q$)). Es gibt dann nach Satz 1 endliche Untermengen von Q, V und V' mit

$(x,y) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in V))$ und

$(y,x) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in V'))$.

Q ist Vereinigung von zulässigen Untermengen von den P_α . Also ist jedes Paar $(a,b) \in Q$ Element einer zulässigen Untermenge Q_α von P_α . Es gibt also ein $\alpha \in A$, so daß $V \subseteq Q_\alpha$ und ebenso ein $\beta \in A$, so daß $V' \subseteq Q_\beta$. Es sei etwa $\alpha \geq \beta$. Es gilt dann

$(x,y) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q_\alpha))$

und $(y,x) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q_\alpha))$.

Da aber $Q_\alpha \in Zul(P_\alpha)$ und $(\mathfrak{T}_\alpha , P_\alpha)$ ein unabhängiges R-System ist, gilt $x = y$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Korollar Es gibt maximale unabhängige R-Systeme. (Nach der Relation " ist feiner als ".) Mit diesen Systemen werden wir uns im nächsten Absatz beschäftigen.

Wir beweisen noch einen Satz, der besagt, daß unabhängige R-Systeme die Forderung C aus Satz 2 vom Absatz 3 erfüllen.

Satz 7 Es sei $(\mathfrak{T} , P)$ ein unabhängiges R-System und $(x,y) \in S$ und $(y,z) \in S'$ für gewisse S und S' aus Es gibt eine S'' aus mit $(x,z) \in S''$.

Beweis Es seien also Q und Q' minimale Untermengen der zu S und S' gehörigen zulässigen Untermengen von P, so daß

$(x,y) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q))$

$(y,z) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in Q'))$.

(Q und Q' sind endlich; sie dürfen aber leer sein.)

Q und Q' seien normal angeordnet. Falls es kein Paar $(a,b) \in Q$ gibt mit $(b,a) \in Q'$, können wir eine zulässige Untermenge von P finden, die sowohl Q als auch Q' umfaßt. Die zu dieser Menge gehörige Ordnung aus $\mathfrak{S}$ enthält dann (x,y) und (y,z) und also auch (x,z). Wenn es Paare gibt mit $(a,b) \in Q$ und $(b,a) \in Q'$, wählen wir das erste solche Paar in Q (nach der normalen Anordnung von Q). Es sei nun Q'' die Menge aller Paare, die vor (a,b) in der Anordnung von Q oder nach (b,a) in der Anordnung von Q' vorkommen. Etwa

$$Q'' = \{(a_1,b_1) \dots (a_m,b_m) \quad (a'_1,b'_1) \dots (a'_n,b'_n)\},$$

wobei die (a_i,b_i) aus Q stammen und die (a_j,b_j) aus Q' stammen. Wir bemerken, daß nach unserer Wahl von (a,b) : $(u,v) \in Q'' \rightarrow (v,u) \notin Q''$. Es gibt also eine zulässige Untermenge von P, die Q'' umfaßt. Es gilt aber auch:

$$(x,a_1) \in R,\ (b_i,a_{i+1}) \in R \quad i = 1 \dots m-1 \text{ und } (b_m,a) \in R .$$

ferner

$$(a,a'_1) \in R\ ,\ (b'_j,a'_{j+1}) \in R \quad i = 1 \dots n$$

und

$$(b'_n,z) \in R\ .$$

Somit ist aber

$$(x,z) \in (\ R,\ (\ [a,b]\ ;\ (a,b) \in Q''\ ))\ ,$$

und unser Satz ist bewiesen.

§ 5 Maximale Systeme

Wir wissen schon aus dem vorigen Absatz, daß es maximale unabhängige R-Systeme gibt (s. § 4, Satz 6). Wir geben zunächst ein Kriterium dafür, wann eine gegebenes unabhängiges R-System maximal ist. Dann beweisen wir einen Satz über die Existenz gewisser Ordnungen in jedem unabhängigen R-System, den wir erst hier bringen, weil er für maximale Systeme besonders interessante Korollare besitzt.

Satz 1 Es sei $(\mathfrak{S}, P)$ ein unabhängiges R-System. $\mathfrak{S}$ ist genau dann maximal, wenn es zu jedem Paar $(x,y) \in M \times M$ eine Ordnung $S \in \mathfrak{S}$ gibt mit $(x,y) \in S$ oder $(y,x) \in S$.

Beweis Gäbe es für ein Paar (x,y) kein solches S, so wären nach Satz 8 aus Absatz 2 $S[x,y]$ und $S[y,x]$ antisymmetrisch für alle $S \in \mathfrak{S}$. Es gäbe also zu der Menge:

$$P' = P \cup \{(x,y), (y,x)\}$$

eine Menge von Ordnungen $\mathfrak{S}'$, so daß $(\mathfrak{S}', P')$ ein unabhängiges R-System wäre und $\mathfrak{S}$ echt feiner als $\mathfrak{S}'$ wäre. Ist andererseits die Bedingung erfüllt, so gibt es zu jedem Paar (x,y) ein $S \in \mathfrak{S}$, für das (etwa) $S[x,y]$ nicht antisymmetrisch ist. Es ist also unmöglich, daß eine echt größere Menge als P ein unabhängiges R-System erzeugt.

Satz 2 Sei $(\mathfrak{S}, P)$ ein unabhängiges R-System und x ein (festes) Element aus M. Es gibt eine Ordnung S_x, für die gilt:

1. $(x,y) \in S_x \rightharpoonup (x,y) \in R$

und 2. $(y,x) \in S$ für irgendein $S \in \mathfrak{S}$ induziert $(y,x) \in S_x$

Beweis Zu jedem y mit $(y,x) \in S$ für ein $S \in \mathfrak{S}$ wählen wir V_y so, daß gilt:

1. $(y,x) \in (R, ([a,b] ; (a,b) \in V_y))$ und
2. Es gibt keine Menge mit weniger Elementen als V_y, die dasselbe leistet.

(V_y kann leer sein.) Eine solche Wahl ist möglich. Wir lassen sie fest von jetzt an. Nun betrachten wir die beiden folgenden Untermengen von P:
Q' definieren wir durch:

$(a,b) \in Q' \rightharpoonup (a,b) \in P$ und $(x,a) \notin R$ und $(x,b) \in R$,

und Q'' besteht aus allen Paaren, die als erstes Element in der normalen Anordnung eines V_y vorkommen.

Hilfssatz a) $(a,b) \in Q' \rightharpoonup (b,a) \notin Q'$

b) $(a,b) \in Q' \rightharpoonup (b,a) \notin Q''$

c) $(a,b) \in Q'' \rightharpoonup (b,a) \notin Q''$

Beweis des Hilfssatzes.

a) ist evident.

b) Wir bemerken, daß $(b,a) \in Q''$ zur Folge hat, daß
$(b,x) \in S$ für ein $S \in \mathfrak{S}$.
Nun gilt:
$(a,b) \in Q' \rightharpoonup (x,b) \in R$.
Wäre $(b,a) \in Q''$, so wäre mithin
$x = b$ und (b,a) erstes Element der normalen Anordnung eines V_y.
Das bedeutet aber $(y,b) \in R$, also
$(y,x) \in R$ und also $V_y = \emptyset$.

Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von V_y.

c) Es sei (a,b) erstes Element von V_y und (b,a) erstes Element von V_z.

Es seien in der normalen Anordnung:

$$V_y = \{(a,b) \quad (a_1,b_1) \ \ldots \ (a_m,b_m)\}$$
$$V_z = \{(b,a) \quad (a'_1,b'_1) \ \ldots \ (a'_n,b'_n)\}$$

(m und n dürfen 0 sein. Dann lese man im folgenden Beweis statt jeweils a_1 oder a'_1 einfach x.)
Es gilt also $(y,a) \in R$ und $(z,b) \in R$ und ferner $(b,a_1) \in R$ und $(a,a'_1) \in R$. Daraus folgt aber

$$(y,x) \in (R, ([u,v] \ ; (u,v) \in V'))$$

und

$$(z,x) \in (R, ([u,v] \ ; (u,v) \in V'')) ,$$

wobei $V'' = V_y \setminus \{(a,b)\}$ und $V' = V_z \setminus \{(b,a)\}$.

Daraus ergibt sich wegen der Wahl von V_y und V_z

$m \geqslant n+1$ und $n \geqslant m+1$, was absurd ist.

Aus dem Hilfssatz folgt, daß es eine zulässige Untermenge von Q von P gibt, die Q' und Q'' umfaßt. Sei S_x die zu Q gehörige Ordnung in $\mathfrak{F}$. Wir behaupten, S_x ist die gesuchte Ordnung. Es ist zunächst klar, daß $(x,y) \in S_x \rightharpoonup (x,y) \in R$, weil Q Q' umfaßt (s. § 4, Satz 3). Es sei nun $(y,x) \in S$ für ein $S \in \mathfrak{F}$. Wir müssen zeigen $(y,x) \in S_x$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Länge von V_y. Wenn V_y leer ist oder nur ein Element hat, ist die Behauptung offenbar wahr.

Induktionsschritt Die Behauptung sei wahr für alle $i \leq n-1$. Nun sei $(y,x) \in S$ für ein $S \in \mathfrak{S}$, und V_y habe n Elemente. Sei (a,b) das erste Paar in der normalen Anordnung von V_y. Dann ist $(b,x) \in S$ und V_b hat höchstens n-1 Elemente. Also ist nach der Induktionsvoraussetzung $(b,x) \in S_x$. Es gilt aber $(y,a) \in R$ und $(a,b) \in S_x$ nach der Konstruktion von S_x. Daraus folgt $(y,x) \in S_x$.

Wählen wir jetzt zu jedem x ein solches S_x fest, so ergibt sich:

Korollar 1 $\qquad \bigwedge_{x \in M} S_x = R$.

Wir bezeichnen die Menge der $S \in \mathfrak{S}$, für die $S = S_x$ ist für mindestens ein $x \in M$, mit $\mathfrak{S}'$.

Wir nehmen jetzt für den Rest dieses Absatzes an, daß $\mathfrak{S}$ ein festes maximales unabhängiges R-System ist. Dann erhalten wir noch folgende Korollare:

Korollar 2 Für jedes Paar $(a,b) \in M \times M$ gibt es ein $S \in \mathfrak{S}'$, mit $(a,b) \in S$ oder $(b,a) \in S$.

Korollar 3 Wenn $S_x = S_y$ ist, folgt $(x,y) \in R$ oder $(y,x) \in R$. In der Tat wäre weder $(x,y) \in R$ noch $(y,x) \in R$ und etwa $(x,y) \in S$ für ein $S \in \mathfrak{S}$, so wäre $(x,y) \in S_y$ und $(x,y) \notin S_x$.

Es seien nun:

für alle $x \in M$ $\qquad F(x) = \{ y \; ; \; (x,y) \notin S_x \text{ und } (y,x) \notin S_x \}$

und für alle S $\qquad G(S) = \{ x \; ; \; S = S_x \}$

Wir definieren jetzt eine neue Ordnung:

$$\Gamma(x) = (S_x \; , \; [y,x] \; ; \; y \in F(x) \;)$$

und bemerken, daß nach Korollar 2 von Satz 2

$$y \in F(x) \rightarrow (x,y) \in S_y$$

Satz 3 T(x) ist antisymmetrisch.

Beweis Angenommen, es seien $(a,b) \in T(x)$ und $(b,a) \in T(x)$ und $a \neq b$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

Fall 1 $(a,b) \subsetneq S_x$ oder $(b,a) \in S_x$, etwa $(a,b) \in S_x$. Dann gilt $(b,a) \notin S_x$ und also $(x,a) \in S_x$ und $(b,y) \in S_x$ für ein $y \in F(x)$. Daraus folgt aber $(x,b) \in S_x$ und mithin $(x,y) \in S_x$; das ist aber unmöglich.

Fall 2 $(a,b) \notin S_x$ und $(b,a) \notin S_x$. Das bedeutet $(x,a) \in S_x$, $(x,b) \in S_x$, $(b,y) \in S_x$ und $(a,y') \in S_x$ für gewisse y, $y' \in F(x)$. Daraus folgt aber $(x,y) \in S_x$, und dieser Fall ist also auch unmöglich.

Satz 4 Es sei $S = S_x = S_z$ und $(z,y) \in T(x)$. Wir behaupten: $y \notin F(z)$.

Beweis Ist (z,y) schon in S, ist weiter nichts zu beweisen. Gilt $(z,y) \notin S$, muß auch $(z,u) \in S$ und $(x,y) \in S$ für ein $u \in F(x)$ gelten. Es ist also $(x,u) \notin S$ und deshalb $(x,z) \notin R$. Aus Satz 2, Korollar 3 folgt nun $(z,x) \in R$, also doch $(z,y) \in S$ und $y \notin F(z)$. Es sei nun $T(S) = (S, ([y,x] ; x \in G(S) \text{ und } y \in F(x)))$.

Satz 5 Sei $(a,b) \in T(S)$. Es gilt $(a,b) \in T(x)$ für ein $x \in G(S)$.

Beweis Es gibt eine minimale endliche Menge:

$$V = \{(y_1,x_1) \dots (y_n,x_n)\} \quad \text{mit}$$

$x_i \in G(S)$ und $y_i \in F(x)$ für $i = 1 \dots n$

und $(a,b) \in (S, ([y,x] ; (y,x) \in V))$.

Wir nehmen an, V sei normal angeordnet und enthalte mindestens zwei Paare. Es gilt dann $(x_1,y_2) \in S$ und $y_2 \in F(x_2)$. Also $(x_2,x_1) \notin S$ und daher $(x_1,x_2) \in R$, und V ist nicht minimal.

Satz 6 T(S) ist antisymmetrisch.

Beweis Angenommen, es gäbe ein Paar $(a,b) \in T(S)$ mit $(b,a) \in T(S)$ und $a \neq b$. Es gibt also x und x' aus G(S) mit $(a,b) \in T(x)$ und $(b,a) \in T(x')$. Es darf weder (a,b) noch (b,a) in S sein, da T(x) und T(x') antisymmetrisch sind. Es gilt also $(a,y) \in S$, $(b,y') \in S$, $(x,b) \in S$ und $(x',a) \in S$ für ein $y \in F(x)$ und ein $y' \in F(x')$. Es sei etwa $(x,x') \in R$; dann gilt $(x,a) \in S$ und also $(x,y) \in S$. Das ist aber unvereinbar mit $y \in F(x)$.

Satz 7 Die Menge $\mathfrak{T} = \{T ; T = T(S) \text{ für ein } S \in \mathfrak{S}'\}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1 aus § 3.

Beweis Die antisymmetrischen Ordnungen T sind offenbar größer als R. Es sei $(x,y) \notin R$ und $(y,x) \notin R$ und etwa $(x,y) \in S_y$. Daraus folgt $(x,y) \notin S_x$ und also $(y,x) \in S_x$ oder $y \in F(x)$. In beiden Fällen gilt $(y,x) \in T(S_x)$.

Korollar 1 $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} T = R$

Korollar 2 M habe die Mächtigkeit n. Jede Ordnung R auf M läßt sich darstellen als Durchschnitt von höchstens n konnexen Ordnungen.

Anhang

Beispiele

Beispiel 1 Dies ist ein Beispiel dafür, daß $Y(M)$ das modulare Gesetz nicht erfüllt.

Sei $M = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (d,a), (d,b)\}$

$T = R \cup \{(d,c)\}$

$S = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (b,c), (c,d), (b,d)\}$

1) $R \not\leq T$

2) (R,S) ist die indiskrete Ordnung auf M

3) $S \wedge T = id_M$

also: $(R, S \wedge T) = R \neq T = (R,S) \wedge T$.

Beispiel 2 Ein Beispiel für zwei Ordnungen mit $f^*(R,S) \neq (f^* R, f^* S)$, wenn f nicht surjektiv ist.

Sei f die Einbettung von $\{a,b\}$ in $\{a, b, c\}$.

R sei die Ordnung $\{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c)\}$

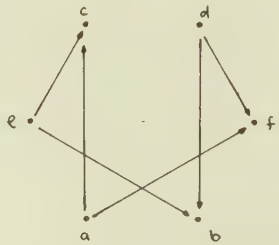
S die Ordnung $\{(a,a), (b,b), (c,c), (c,b)\}$

Es ist $f^* R = f^* S = (f^* R, f^* S) = \{(a,a), (b,b)\}$.

$f^*(R,S)$ ist aber $\{(a,a), (b,b), (a,c)\}$.

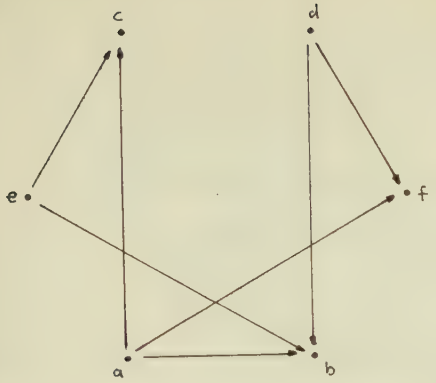
Beispiel 3 Ein Beispiel für die Anwendung der Methoden von Kapitel 3. Wir benutzen hier Schaubilder für die Ordnungen, die in der natürlichen Weise verstanden werden sollen.

6.

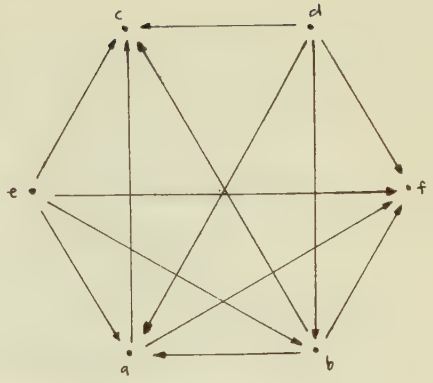


R.

γ_2

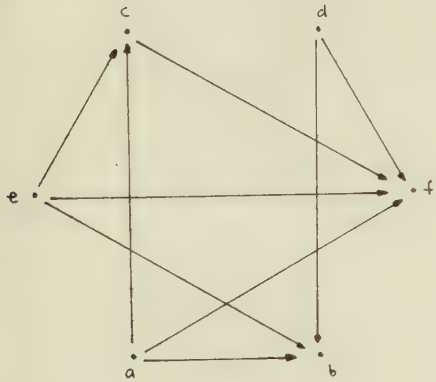


R[a,b]

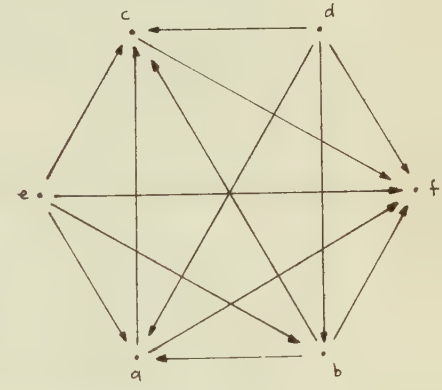


R[b,a]

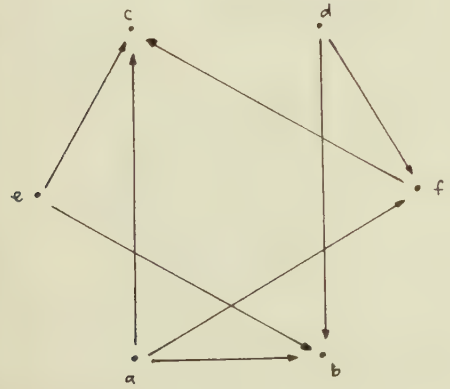
γ_3



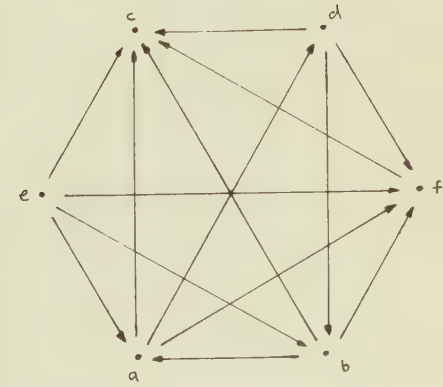
R[a,b][c,f]



R[b,a][c,f]

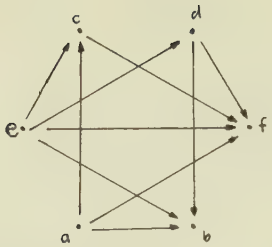


R[,][,]

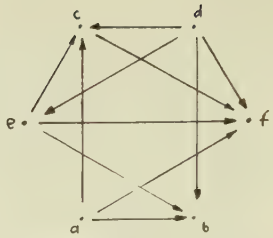


R[b,a][f,c]

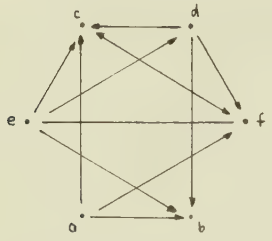
$\mathfrak{G}_4$



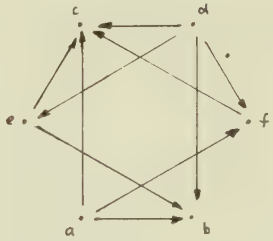
$S_1 = R[a,b][c,f][e,d]$



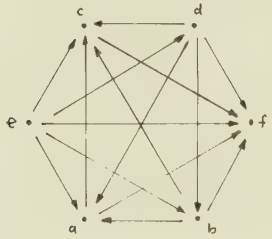
$S_2 = R[a,b][c,f][d,e]$



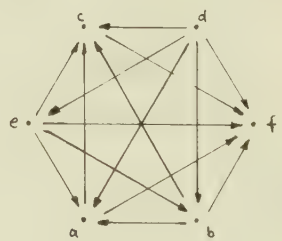
$S_3 = R[a,b][f,c][e,d]$



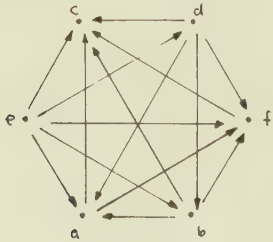
$S_4 = R[a,b][f,c][d,e]$



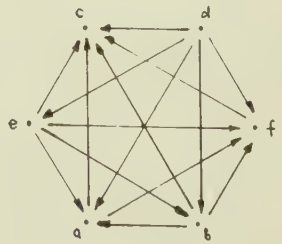
$S_5 = R[b,a][c,f][e,d]$



$S_6 = R[b,a][c,f][d,e]$

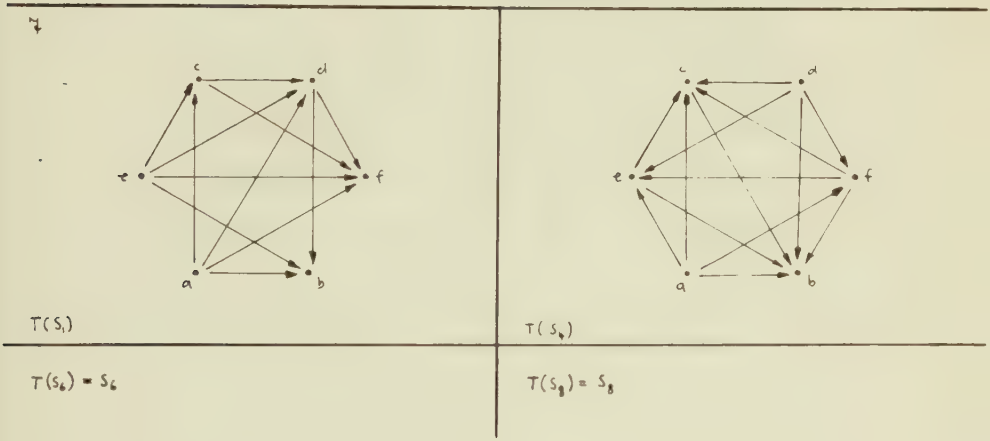


$S_7 = R[b,a][f,c][e,d]$



$S_8 = R[b,a][f,c][d,e]$

S_4 ist, da S_5 konnex ist, maximal. Wir wählen:
$S_a = S_f = S_6$; $S_b = S_e = S_4$; $S_c = S_8$; $S_d = S_1$.
Wir geben jetzt Schaubilder der Ordnungen $T(S)$.
Man wird bemerken, daß $T(S_1)$, $T(S_4)$ und $T(S_6)$ zusammen die Voraussetzungen von Satz 2 aus Kapitel 3, § 2 erfüllen. R läßt sich also als Durchschnitt von drei Ordnungen, während unsere Methode Durchschnittsdarstellungen mit vier Ordnungen liefert, bezeichnen. Wenn man aber beachtet, daß jede konnexe Ordnung, die gröber ist als R auch gröber als genau eine der S_i ist, kann man leicht errechnen, daß es 38 konnexe und antisymmetrische Ordnungen gibt, die gröber sind als R.



Literaturverzeichnis

[1] Birkhoff, G.
Lattice Theory Amer.Math.Soc., New York 1948

[2] Dilworth, P.
A decomposition theorem for partially ordered sets
Ann. of Math. (2) 51 (1950) 161 - 166

[3] Fulkerson, D.R.
A note on Dilworth's decomposition theorem
Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956) 701 - 702

[4] Szasz, G.
Einführung in die Verbandstheorie
Verlag der Ungar.Akad. der Wiss. Budapest 1962

[5] Tarski, A.
Introduction to Logic Oxford, New York 1946

[6] Tarski, A.
Cardinal Algebras Oxford, New York 1949

[7] Tarski, A. and Chin, L.H.
Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras
Univ.Calif.Publ.Math. (N.S.) 1 (1951) 341 - 384

Lebenslauf

Am 29.1o.1938 wurde ich in Cambridge, England, geboren. Meine Eltern, Raimund Pretzel und seine Enefrau Erika, geb. Hirsch, waren deutsche Emigranten. Nach dem Besuch einiger Grundschulen kam ich 1949 auf das Wimbledon College. Dort bestand ich 1954 das General Certificate of Education, Ordinary Level. Kurz darauf kehrten meine Eltern nach Berlin zurück, und im Herbst desselben Jahres wurde ich in das Steglitzer Gymnasium aufgenommen. Im Frühjahr 1957 bestand ich die Reifeprüfung und studiere seitdem an der Freien Universität Mathematik. Ich bestand am 29.11.196o die Diplomvorprüfung und am 6.7.1962 die Diplomprüfung. Im März 1964 wurde ich als wissenschaftliche Hilfskraft im 1. Mathematischen Institut angestellt; seit dem 1.Juli bin ich dort Verwalter einer Assistentenstelle.
Ich bin verheiratet und habe zwei Söhne.

Oliver Pretzel